**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**
**FACULTAD DE CIENCIA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN**

# MÉTODOS DE TEORÍA DE OPERADORES PARA ECUACIONES EN DIFERENCIAS FRACCIONARIAS

**JENNIFER ANDREA BRAVO ROSERO**

**Profesor Guía:** Dr. Carlos Enrique Lizama Yáñez.

Tesis presentada al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile, para optar al grado de Magíster en Ciencia en la Especialidad de Matemática.

Santiago, Chile
2018

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

la presente trabajo de tesis titulado "**Métodos de Teoría de Operadores para Ecuaciones en Diferencias Fraccionarias**", presentado por **Jennifer Andrea Bravo Rosero** en cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de Magíster en Ciencia en la Especialidad de Matemática, fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Carlos Lizama Yáñez del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, compuesta por los doctores Rodrigo Ponce Cubillos del Instituto de Matemáticas y Física de la Universidad de Talca y Sebastián Zamorano Aliaga de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Chile.

| | |
|---|---|
| **Rodrigo Ponce Cubillos, Ph. D.**<br>**Profesor Informante** | **Sebastián Zamorano Aliaga, Ph. D.**<br>**Profesor Informante** |
| **Carlos Lizama Yáñez, Dr.rer.nat.**<br>**Profesor Guía** | **Director** |

**INFORME DE TESIS**

En esta tesis, conducente al grado de Magister en Ciencia en la Especialidad de Matemática, por la Universidad de Santiago de Chile, el objetivo general fue estudiar ecuaciones en diferencias de orden fraccionario que corresponden al análogo discreto del Problema Abstracto de Cauchy, de orden fraccionario menor a uno (o subdifusivo). Además, estudiar su estabilidad, en el sentido del decaimiento a cero en norma.

El trabajo se organiza en cuatro capítulos, muy bien escritos. El primer capítulo discute preliminares matemáticos sobre el cálculo fraccionario y la transformación de Poisson, recientemente introducida por el suscrito en la referencia [19].

El segundo capítulo hace un resumen cuidadoso de la teoría de $C_0$-semigrupos, enunciando los tres principales resultados de la teoría: Teorema de Hille-Yosida (o generación); teorema de Trotter-Kato ( o aproximación) y teorema de perturbación aditiva. Además enuncia el célebre teorema de Datko-Pazy, que resulta fundamental para los resultados de estabilidad de la última sección de este trabajo.

El tercer capítulo trata de dos nociones de familias resolventes de operadores lineales acotados. Una, que es adaptada al problema abstracto de Cauchy con derivada fraccionaria de Caputo, y, otra, que es adaptada al problema abstracto de Cauchy con derivada fraccionaria de Riemann-Lioville. Además, se recuerda un resultado de Bazhlekova (originalmente debido a J. Prüss) sobre lo que se conoce actualmente como principio de subordinación.

El cuarto capítulo es el medular de esta tesis y consiste en profundizar en la teoría desarrollada recientemente por el suscrito en la referencia [19]. Cabe hacer notar que esta tesis incorpora varias mejoras a los resultados de [19], contribuciones valiosas de la Srta. Bravo, y que serán objeto de un futuro manuscrito. Esencialmente se trata de la introducción de la ecuación discreta de Zaslavsky y el estudio de sus propiedades principales: Representación y estabilidad.

En resumen, se trata de una magnífica tesis de magister, con soluciones a los problemas propuestos muy bien logrados. Además, los resultados de la tesis le abren a la Srta. Bravo un amplio abanico de posibilidades de investigación en el área de ecuaciones en diferencias abstractas. En vista de las anteriores consideraciones, lo califico con nota 7.0 (siete).

Dr. Carlos Lizama Yáñez
Profesor Guía

## INFORME DE TESIS

En este trabajo de tesis, conducente al grado académico de Magíster en Ciencias en la Especialidad de Matemática por la Universidad de Santiago de Chile, la autora estudia en detalle recientes métodos de la teoría de operadores que permiten estudiar la existencia de soluciones para ecuaciones en diferencias de orden fraccionario (en tiempo) en espacios de Banach, así como también algunas de las propiedades de dichas soluciones.

El primer capítulo está dedicado a elementos generales de la teoría de operadores cerrados, cálculo fraccionario (continuo y discreto). Aquí se detallan y prueban algunas propiedades importantes en la reciente teoría de cálculo fraccionario discreto.

En el segundo capítulo se resumen las principales definiciones y resultados clásicos en torno a la teoría de $C_0$-semigrupos de operadores. Aquí se presenta la definición de un $C_0$-semigrupo generado por un operador cerrado $A$ en un espacio de Banach $X$, se recuerdan algunos resultados de unicidad, de generación, de perturbación y aproximación, entre otros. Además, se exhiben algunos resultados clásicos del decaimiento exponencial uniforme de $C_0$-semigrupos que serán elementos claves en el estudio de las propiedades de decaimiento de las soluciones de ecuaciones en diferencias fraccionarias que se tratarán en el Capítulo 4.

El tercer capítulo de este trabajo de tesis, trata sobre familias $\alpha$ y $(\alpha, \alpha)$ resolventes, que son denotadas respectivamente por $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, y su relación con el estudio de ecuaciones diferenciales fraccionarias (en tiempo continuo). Aquí se resumen las principales propiedades de estas dos familias, se muestran algunos ejemplos y prueban algunos resultados de subordinación que permiten encontrar representaciones integrales de estas familias de operadores.

El cuarto y último capítulo está dedicado al estudio en detalle del artículo [19] por C. Lizama, publicado recientemente en Proceedings of AMS. Este capítulo comienza con los principales elementos del cálculo fraccionario discreto introducidos en [19]. Se presentan las definiciones de *sumas fraccionarias, operador de diferencia fraccionaria, operador de diferencia fraccionaria de Caputo y de Riemann-Liouville*, entre otros, y se prueban importantes e interesantes propiedades de estos operadores. Además, se demuestra una interesante propiedad que relaciona la derivada fraccionaria (continua) con la derivada fraccionaria (discreta) mediante el núcleo de Poisson. Este resultado es clave para el estudio de ecuaciones en diferencias fraccionarias. El capítulo continúa con el estudio del problema homogéneo de valor inicial de orden fraccionario

$$\Delta^\alpha u(n) = Au(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

donde $A$ es un operador cerrado definido en un espacio de Banach $X$ y $\Delta^\alpha$ denota el operador en diferencia fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha$. Aquí, cuando $A$ es el generador de una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente, se exhibe un representación explícita de la solución $u$ de la ecuación (1) en términos de esta familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ generada por $A$ y el núcleo de Poisson $p_n(t) := e^{-t}\frac{t^n}{n!}$. Por otro lado, cuando $A$ es el generador de un $C_0$-semigrupo acotado, también se obtiene una fórmula explícita para la solución $u$ mediante el uso de los teoremas de subordinación presentados en el Capítulo 3. Resultados similares a estos ya mencionados se prueban en el caso que $A$ es el generador de una familia $\alpha$-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. El capítulo concluye con interesantes resultados de estabilidad de las soluciones. Más especícamente, aquí se muestran condiciones sobre el operador $A$ o sobre la familia resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ implicando que la solución $u$ de (1) decaiga en norma a 0, esto es, $||u(n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

El trabajo desarrollado por la Srta. Jennifer Bravo es una tesis bien escrita, autocontenida, donde se demuestran detallamente resultados interesantes, recientes y no triviales en la teoría de ecuaciones en diferencias de orden fraccionario.

Por las consideraciones anteriores, califico este trabajo con nota máxima, siete punto cero (7.0).

Dr. Rodrigo Ponce Cubillos
Profesor Informante

**INFORME DE TESIS**

Sobre el trabajo de tesis: "Métodos de Teoría de Operadores para Ecuaciones en Diferencias Fraccionarias" realizado por la Srta. Jennifer Andrea Bravo Rosero, mis apreciaciones son las siguientes:

En esta tesis la Srta. Bravo desarrolla la teoría matemática para abordar el problema de existencia y estabilidad de soluciones para ecuaciones en diferencias fraccionarias usando la teoría de las familias $(\alpha, \alpha)$–resolventes.

En los primeros tres capítulos del trabajo se presentan los conceptos de derivada fraccionaria en el sentido de Caputo y de Riemann–Liouville, e introduce las propiedades de las funciones de Mittag–Leffler y de tipo Wright. Luego resume de manera óptima la teoría de semigrupos fuertemente continuos y de familias $(\alpha, \alpha)$–resolventes.

En el último capítulo se analiza la ecuación cinética de orden fraccionario. Específicamente, se estudia la ecuación discreta de Zaslavsky, donde se utilizan los conceptos introducidos previamente para poder probar la existencia de soluciones cuando el operador $A$ es el generador de una familia $(\alpha, \alpha)$–resolvente. Finalmente, se analiza la estabilidad para dichas soluciones.

El trabajo desarrollado por la Srta. Bravo es un texto muy bien escrito y cuenta con las referencias adecuadas para justificar las afirmaciones que no se encuentran demostradas. Los resultados son de un nivel bastante avanzado, interesantes y originales. Creo además que servirá como un excelente insumo para futuros trabajos en el tema.

El trabajo realizado cumple plenamente con los requisitos necesarios para optar al grado de Magíster en Ciencia en la Especialidad de Matemática.

Por las consideraciones anteriores califico la presente tesis con nota 7,0 (siete coma cero).

Dr. Sebastián Zamorano Aliaga
Profesor Informante

# Agradecimientos

Quisiera expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que directa e indirectamente me brindaron su apoyo para la realización plena del presente trabajo.

Agradecer en primer lugar, al director de mi tesis, el profesor Dr. Carlos Lizama Yáñez, por su orientación, supervisión y continúo acompañamiento en la preparación de este trabajo. Además, por compartir sus conocimientos, consejos, valiosas opiniones y diversas oportunidades académicas, fortaleciendo mi formación profesional. Por su motivación, entusiasmo, disposición, tiempo, ayuda y dedicación entregada a lo largo de este año, infinitas gracias.

A mi madre, padre y hermana por su permanente e incondicional apoyo, que trascienden en la distancia, por sus ánimos, energías, motivación y confianza brindada durante toda mi vida, por sus consejos y paciencia, por su amor y preocupación, quiero decirles mil y mil gracias.

Un agradecimiento muy especial merecen los maestros, funcionarios, compañeros y amigos del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, de la Universidad de Santiago de Chile, por sus enseñanzas, gestiones, amistad, acogida y hospitalidad durante mi permanencia en el programa del magíster.

A todos ellos, muchas gracias.

# Índice general

# Introducción

El estudio de las diferencias finitas de orden fraccionario ha sido un trabajo que numerosos científicos han desarrollado en los últimos años, aunque mucho más tarde con respecto a las derivadas de orden fraccionario, con el propósito de establecer un cálculo fraccionario de diferencias finitas que fuera comparable con el cálculo ya existente de derivadas fraccionarias.

Algunas de las primeras investigaciones en esta área datan de los años 1957 y 1974 en los cuales B. Kuttener, en [18], y J. Díaz junto a T. Osler, en [9], introdujeron un operador de diferencia fraccionaria discreto como una serie infinita. En el año 1988, H. Gray y N. Zhang, en [15], desarrollan un cálculo fraccionario para el operador de diferencia discreta nabla, mientras al mismo tiempo, S. Miller y B. Ross, en [24], definen una suma fraccionaria mediante la solución de una ecuación lineal de diferencias.

Durante la última década, ha habido un creciente interés en el análisis de la existencia y las propiedades cualitativas de las ecuaciones en diferencias fraccionarias. F. Atici y P. Eloe en [3, 4, 5], utilizando la definición de suma fraccionaria de S. Miller y B. Ross, desarrollaron el operador de diferencia fraccionaria de Riemann-Liouville y algunas propiedades que permiten obtener soluciones de ciertas ecuaciones en diferencia fraccionaria. Sobre propiedades cualitativas, C. Goodrich en [12] estudió la existencia de soluciones positivas y propiedades geométricas.

La teoría de las ecuaciones fraccionarias discretas es una herramienta prometedora para el estudio de varios fenómenos biológicos y físicos donde aparece el efecto de memoria [6], ya que estos modelos fraccionarios abstractos discretos están relacionados con métodos numéricos para ecuaciones de evolución con memoria.

Sin embargo, a pesar del aumento significativo de la investigación en esta área, todavía hay muchas preguntas abiertas sobre las ecuaciones en diferencias fraccionarias. En particular, un problema que interesa a los matemáticos son las ecuaciones en diferencias fraccionarias con operadores lineales acotados y su estabilidad.

En el año 2017, C. Lizama en [19] estudia el problema de valor inicial de Cauchy en diferencias de orden fraccionario,

$$\begin{cases} \Delta^\alpha u(n) = Au(n+1), & n \in \mathbb{N}_0; \\ \quad u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{2}$$

cuando $A$ es un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ definido en un espacio de Banach $X$, donde $\Delta^\alpha$ corresponde al operador de diferencia fraccionaria de Riemann-Liouville y $0 < \alpha \leq 1$. El estudio de (2) se desarrolla con ayuda de un novedoso método basado en la distribución de Poisson, introducido en [19, Teorema 3.1] y estudiado en el Capítulo 1 de este trabajo, que permite discretizar el operador diferencial fraccionario.

Este trabajo de grado consta de cuatro capítulos y los resultados obtenidos están basados e inspirados en los resultados de C. Lizama [19], para el problema de valor inicial (2). En el primer capítulo se presentan algunos de los preliminares utilizados a lo largo de todo el trabajo, se inicia con una sección que contiene los conceptos, funciones y resultados básicos necesarios para la comprensión y desarrollo de otros resultados. Después, se introducen rápidamente las definiciones y algunas propiedades de los operadores de integración y derivación fraccionaria, y de dos funciones especiales que están relacionadas con las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Al final de este capítulo, se enuncia la transformación de Poisson (1.22) y se muestra la relación entre la transformada de Laplace y la transformada $Z$.

El segundo capítulo es un resumen de los conceptos necesarios de la teoría de los $C_0$-semigrupos y de sus propiedades y aplicaciones. Se introduce uno de los conceptos de estabilidad asintótica y las propiedades esenciales de estabilidad en los $C_0$-semigrupos. En el siguiente capítulo se presenta una teoría que generaliza la noción de $C_0$-semigrupo, las familias $\alpha$-resolventes y $(\alpha, \alpha)$-resolventes, se enuncia sus representaciones en términos del generador correspondiente y un principio que establece una subordinación entre estas familias, como también con los $C_0$-semigrupos. Estos dos capítulos se introducen con el fin de su posterior asociación a problemas de ecuaciones en diferencias fraccionarias.

Finalmente, después de trabajar en cada uno los contenidos anteriores se llega al capítulo más importante de este trabajo de grado: el cuarto capítulo. Aquí, se inicia con las definiciones y notaciones de la teoría del cálculo fraccionario discreto que se usan en las siguientes secciones, se presenta una propiedad que relaciona el operador de diferencia fraccionaria de Riemann-Liouville con el de Caputo (Teorema 4.1.1). Luego, se establecen varias relaciones entre lo continuo y lo discreto mediante la transformación de Poisson, entre ellas, conectar el operador fraccionario de Riemann-Liouville continuo y discreto (Teorema 4.2.2). En la Sección 4.3, se usan los conceptos y resultados anteriores para resolver el problema (2), cuando $A$ es el generador de una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente, y seguidamente se prueban los resultados principales de esta tesis, algunos de ellos dan una representación explícita de la solución de la ecuación discreta de Zaslavsky (4.11). A continuación, en la Sección 4.4, se obtienen resultados de estabilidad para las soluciones de las ecuaciones en diferencias fraccionarias estudiadas en la sección anterior, esto se logra con ayuda de los resultados de estabilidad que existen para un $C_0$-semigrupo generado por un operador $A$.

# Capítulo 1

# Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir algunos conceptos, funciones y resultados fundamentales, de las referencias [1, 2, 8, 13, 14, 17, 19, 21, 23] que son de gran utilidad para la comprensión y elaboración de este trabajo.

## 1.1. Definiciones y propiedades generales

En el desarrollo de este trabajo, $X$ es un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, el cual puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Además, se denota por $||\cdot||$ la norma en $X$.

Una *transformación lineal* es una función $T : D(T) \to X$, tal que, $T(\alpha x+\beta y) = \alpha Tx+\beta Ty$ donde $x, y \in D(T)$ y $\alpha, \beta$ son escalares. $D(T)$ es un subespacio de $X$ y se llama el *dominio* de $T$.

**Definición 1.1.1** (Operador lineal acotado)**.** *Sea $T : X \to X$ un operador lineal, entonces $T$ se dice acotado si existe un número real $c > 0$ tal que para todo $x \in X$, $||Tx|| \leq c||x||$.*

Además, $||T|| := \sup_{||x||=1} ||Tx||$ es llamada la *norma* del operador lineal acotado $T$ y al conjunto de operadores lineales acotados, $T : X \to X$, se denota por $\mathcal{B}(X)$.

Por ejemplo, el operador identidad $I : X \to X$ es acotado y tiene norma $||I|| = 1$, luego $I \in \mathcal{B}(X)$.

**Definición 1.1.2** (Operador lineal cerrado)**.** *Sea $T : D(T) \to X$ un operador lineal, entonces $T$ se dice cerrado si su grafo, $G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$, es cerrado en $X \times X$.*

Los siguientes teoremas dan condiciones para que operadores lineales cerrados sean acotados y una caracterización para operadores lineales cerrados, respectivamente. Para una prueba ver [17, Capítulo 4, Teorema 4.13-2] y [17, Capítulo 4, Teorema 4.13-3].

**Teorema 1.1.1** (del grafo cerrado)**.** *Sea $T : D(T) \to X$ un operador lineal cerrado. Entonces, si $D(T)$ es cerrado en $X$, el operador $T$ es acotado.*

**Teorema 1.1.2** (del operador lineal cerrado)**.** *Sea $T : D(T) \to X$ un operador lineal. Entonces, $T$ es cerrado si y solo si tiene la siguiente propiedad: Si $x_n \to x$, donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $x_n \in D(T)$, y $Tx_n \to y$, entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$.*

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador lineal. Se dice que $T$ es *invertible* si existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tal que para todo $x \in X$, $STx = x = TSx$. En ese caso, se llama a $S$ el inverso de $T$ y se denota por $S = T^{-1}$.

Se tiene la siguiente proposición que relaciona las series de potencias con los operadores.

**Proposición 1.1.1.** *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ y $||T|| < 1$, entonces $I - T$ es invertible.*

*Demostración.* Sea $f(T) := \sum_{k=0}^{\infty} T^k$, entonces $f(T)$ converge pues $||T|| < 1$ y además $f(T) \in \mathcal{B}(X)$. En efecto:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T^k|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T||^k < \frac{1}{1 - ||T||}.$$

Además,

$$(I - T)f(T) = (I - T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k - \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} T^k - \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} = I.$$

Análogamente, se tiene que $f(T)(I - T) = I$, luego $I - T$ es invertible. $\square$

Ahora, se indaga sobre la existencia del inverso del operador $T_\lambda = \lambda I - T$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $T : D(T) \subseteq X \to X$ es un operador lineal. Desde un punto de vista histórico, la *teoría espectral* surge de la anterior pregunta y fue introducida por David Hilbert en su formulación original de la teoría del espacio de Hilbert. Aunque, este término refiere a todas las teorías que extienden la teoría de autovectores y autovalores de una matriz cuadrada a la teoría de operadores. El conocimiento de los autovalores, los no autovalores y de los espacios asociados a ellos dan mucha información sobre el comportamiento del operador. Por ejemplo, desde el punto de vista físico, los espectros determinan los posibles modos de vibración de las ondas.

Así, si el operador $T_\lambda$ tiene inverso, este se denota por $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1} = {T_\lambda}^{-1}$ y se llama el *operador resolvente* de $T$. El nombre resolvente es apropiado ya que $R(\lambda, T)$ ayuda a resolver la ecuación $T_\lambda x = y$, pues $x = {T_\lambda}^{-1} y = R(\lambda, T)y$ si $R(\lambda, T)$ existe. El estudio de las propiedades de $R(\lambda, T)$ es fundamental para la comprensión del operador $T$. Como se observa, las propiedades de $T_\lambda$ y $R(\lambda, T)$ dependen de $\lambda$. Por lo tanto, se tienen las siguientes definiciones:

**Definición 1.1.3.** *Sea $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operador. Se define el conjunto resolvente de $T$ como*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \text{ es invertible y } (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}.$$

*El complemento de $\rho(T)$ se llama el espectro de $T$ y se denota por $\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$. El operador $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$ con $\lambda \in \rho(T)$ se llama el resolvente de $T$ en $\lambda$.*

El siguiente teorema da propiedades sobre el conjunto resolvente y el espectro de un operador lineal acotado (ver [17, Capítulo 7, Teorema 7.3-2, p376]).

**Teorema 1.1.3** (Espectro cerrado)**.** *El conjunto resolvente $\rho(T)$ de un operador lineal acotado $T : X \to X$ es abierto. Por lo tanto, el espectro $\sigma(T)$ es cerrado.*

Una función de gran ayuda para el desarrollo de algunos resultados es la *función gamma*, $\Gamma(z)$, la cual es una extensión de la función factorial y se define para todo número complejo $z$, $Re(z) > 0$, por la integral de Euler como

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

La fórmula de Hankel para la función gamma da una extensión de la definición anterior para todos los $z \in \mathbb{C}$ excepto $z = 0, -1, -2, ...$, y está dada por la siguiente expresión ([14, Fórmula 8.310(2)]):

$$\Gamma(z) := \frac{1}{2i\sin(\pi z)}\int_C t^{z-1}e^t dt, \tag{1.1}$$

donde $C$ es un contorno que comienza y termina en $-\infty$ y rodea el origen en sentido antihorario.

Algunas propiedades que tiene la función gamma, y que se usan en este trabajo, son las siguientes (ver [14, Fórmulas 8.338(1), 8.331(2), 8.339(1), 8.334(3), 3.191(1), 8.328(2)]):

(I) $\Gamma(1) = 1$.

(II) Para $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(III) Para $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

(IV) Para $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$, $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi(\sin(\pi z))^{-1}$.

(V) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha) > 0$ y $Re(\beta) > 0$,

$$\int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}ds = t^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.2}$$

(VI) Para $z \in \mathbb{C}$ y $\beta > 0$ se tiene,

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\Gamma(z+\beta)}{\Gamma(z)} z^{-\beta} = 1. \tag{1.3}$$

A continuación se dan dos definiciones que juegan un papel fundamental en el cálculo fraccionario discreto y continuo, respectivamente.

El siguiente mapeo define una sucesión que involucra la función gamma y ha aparecido en la literatura en relación con la sumabilidad de series de Fourier.

**Definición 1.1.4.** *Para* $\alpha \in \mathbb{C}$*, se define*

$$k^{\alpha}(n) := \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{n!}, \ n \in \mathbb{N} \quad y \quad k^{\alpha}(0) := 1.$$

Se observa que si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$, entonces se tiene

$$k^{\alpha}(n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Además, si $\alpha = 1$ se tiene $k^1(n) = 1$ y si $\alpha = 0$ se tiene $k^0(n) = 0$, donde $n \in \mathbb{N}_0$.

Seguidamente, se dan algunas de las propiedades más importantes que satisface el núcleo $k^{\alpha}$. Para una prueba ver [21, Proposición 3.1].

(I) Para $\alpha > 0$, $k^{\alpha}(n) > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(II) Para $0 < \alpha < 1$, $k^{\alpha}(n)$ es decreciente y $k^{\alpha}(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(III) Para $\alpha > 1$, $k^{\alpha}(n)$ es creciente.

(IV) $k^{\alpha}(n) \leq k^{\beta}(n)$ para $0 < \alpha \leq \beta$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(V) El núcleo $k^{\alpha}$ satisface la siguiente fórmula de generación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^{\alpha}(n) z^n = \frac{1}{(1-z)^{\alpha}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1.$$

La siguiente función toma gran importancia en este trabajo y es de gran ayuda para las siguientes definiciones.

**Definición 1.1.5.** *Para* $\alpha > 0$ *se define la función* $g_{\alpha}$*, por*

$$g_{\alpha}(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

La *convolución finita* de dos funciones $f$ y $g$ está definida como

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s) g(t-s) ds, \quad t > 0.$$

**Proposición 1.1.2.** *Para cada* $\alpha, \beta > 0$ *se tiene la siguiente propiedad de semigrupo*

$$g_{\alpha+\beta} = g_{\alpha} * g_{\beta}.$$

*Demostración.* Sea $t > 0$. Entonces,

$$(g_\alpha * g_\beta)(t) = \int_0^t g_\alpha(s) g_\beta(t-s)ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}ds.$$

Por lo tanto, se tiene por (1.2):

$$(g_\alpha * g_\beta)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = g_{\alpha+\beta}(t).$$

□

Otra función que es importante a lo largo este trabajo es la transformada de Laplace, que recibe su nombre en honor del matemático Pierre-Simon Laplace y fue presentada dentro de su teoría de la probabilidad. Se usa en la resolución de ecuaciones diferenciales en tiempo continuo.

**Definición 1.1.6.** *Sea $f : [0, \infty[ \to X$ localmente integrable. Se dice que $f$ es una función exponencialmente acotada si existen constantes $M > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $||f(t)|| \leq Me^{\omega t}$, para cada $t \geq 0$. Si $f$ es exponencialmente acotada se define su transformada de Laplace, $\widehat{f} : \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > \omega\} \to X$, por*

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt,$$

*donde la integral se entiende en el sentido de Bochner ([2, Capítulo 1]).*

En particular, si $\omega = 0$ se dice que $f$ es *acotada* y su transformada de Laplace existe para todo $Re(\lambda) > 0$.

**Teorema 1.1.4** (de unicidad, [2, Capítulo 1, Teorema 1.7.3])**.** *Sean $f, g : [0, \infty[ \to X$ funciones localmente integrables exponencialmente acotadas. Si $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{g}(\lambda)$ para $Re(\lambda)$ suficientemente grande, entonces $f = g$ en casi todo punto.*

La convolución entre dos funciones $f$ y $g$ tales que sus transformadas de Laplace existen, satisface la siguiente identidad:

$$\widehat{(f * g)}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda).$$

Por ejemplo, la transformada de Laplace de $f(t) = t^\delta$ con $\delta > -1$ está dada por:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\lambda^{\delta+1}}. \tag{1.6}$$

En particular, si $\delta = n \in \mathbb{N}_0$, en (1.6), se tiene que $\Gamma(n+1) = n!$ y por lo tanto

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}. \tag{1.7}$$

Así, por (1.6) se tiene que la transformada de Laplace de la función $g_\alpha(t)$, donde $\alpha > 0$, está dada por

$$\widehat{g_\alpha}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_\alpha(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dt = \frac{1}{\lambda^\alpha}.$$

La transformada de Laplace tiene un resultado inverso y está dado por la siguiente integral de línea llamada la *transformada inversa de Laplace*:

$$f(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\widehat{f}(\lambda)d\lambda,$$

donde $\gamma$ es una constante real tal que $\gamma$ es mayor que la parte real de todas las singularidades de $\widehat{f}(\lambda)$.

Por ejemplo, la transformada inversa de Laplace de $\widehat{g_\alpha}(\lambda)$ es $g_\alpha(t)$, es decir,

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^\alpha}d\lambda, \quad \alpha > 0,$$

donde $\Gamma$ es un contorno que comienza y termina en $-\infty$ y rodea el origen en sentido antihorario. En particular, si $t = 1$ se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda}\lambda^{-\alpha}d\lambda, \quad \alpha > 0. \tag{1.8}$$

El siguiente teorema da una fórmula general para la $n$-ésima derivada de la transformada de Laplace de una función (ver [2, Capítulo 1, Teorema 1.5.1, p32]).

**Teorema 1.1.5.** *Sea $f : [0,\infty[\to X$ una función localmente integrable, entonces para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $Re(\lambda)$ suficientemente grande, se tiene:*

$$\widehat{f}^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n f(t)dt.$$

Por otro lado, una transformación de gran importancia en el cálculo discreto, como lo es la transformada de Laplace en el continuo, es la *transformada Z*, presentada por W. Hurewicz en 1947, que convierte una señal de tiempo discreto en una representación compleja. Al igual que la transformada de Laplace, la transformada Z es una función de variable compleja y su definición es la siguiente.

**Definición 1.1.7.** *Sea $f \in s(\mathbb{N}_0; X)$ una sucesión de valor vectorial, que satisface la condición: existen $M > 0$ y $R > 0$ tal que $||f(n)|| < MR^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La transformada Z de $f(n)$ está definida por*

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{j=0}^\infty z^{-j} f(j).$$

Notar que,

$$||\widetilde{f}(z)|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |z^{-j}|||f(j)|| < \sum_{j=0}^{\infty} |z^{-j}||MR^j| = M \sum_{j=0}^{\infty} \left|\frac{R}{z}\right|^j,$$

entonces la serie converge si se tiene que $|\frac{R}{z}| < 1$, es decir, $|z| > R$. Por lo tanto, la transformada $Z$ de $f$ existe si $|z| > R$.

Una de las propiedades de la transformada $Z$ está relacionada con la convolución discreta. Primero se recuerda la siguiente definición: sean $f, g \in s(\mathbb{N}_0; X)$ sucesiones, entonces la *convolución discreta* entre $f(n)$ y $g(n)$ está dada por

$$(f * g)(n) := \sum_{j=0}^{n} f(n-j)g(j), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Así, se tiene que la transformada $Z$ de la convolución entre dos sucesiones $f(n)$ y $g(n)$, tales que sus transformadas $Z$ existen y $R$ es suficientemente grande, satisface:

$$\widetilde{(f * g)}(z) = \widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z), \quad |z| > R.$$

Posteriormente se tienen dos reglas que ayudan a derivar el producto y la composición de dos funciones diferenciables (ver [14, Fórmula 0.42 y 0.430(1)]).

La $n$-ésima derivada de un producto ó *regla de Leibniz*, de dos funciones $f$ y $g$ $n$-veces diferenciables en $x$, es:

$$\frac{d^n(fg)}{dx^n} = f\frac{d^n g}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{df}{dx}\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + ... + g\frac{d^n f}{dx^n}. \tag{1.9}$$

Si $f(x) = F(y)$ donde $y = \varphi(x)$, entonces la $n$-ésima derivada de la composición, $f$, está dada por:

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{U_1}{1!}F'(y) + \frac{U_2}{2!}F''(y) + \frac{U_3}{3!}F'''(y) + ... + \frac{U_n}{n!}F^{(n)}(y), \tag{1.10}$$

donde

$$U_k = \frac{d^n}{dx^n}y^k - \frac{k}{1!}y\frac{d^n}{dx^n}y^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!}y^2\frac{d^n}{dx^n}y^{k-2} - ... + (-1)^{k-1}ky^{k-1}\frac{d^n y}{dx^n}.$$

## 1.2. Cálculo fraccionario, función de Mittag-Leffler y de tipo Wright

El cálculo fraccionario surgió con la notación de diferencial creada por Leibniz, en 1695, al responder una carta de G. F. Antoine, marqués de L'Hôpital. Actualmente es de gran importancia en el estudio de materiales con memoria, fenómenos de difusión, epidemiología, vibraciones mecánicas, entre otros.

A continuación se enuncia la definición de integral y derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville y Caputo, las cuales son frecuentemente usadas en el cálculo fraccionario continuo. Ellas están dadas en términos de la función $g_\alpha$ definida en (1.5).

**Definición 1.2.1.** *La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden* $\alpha > 0$ *de una función* $u : [0, \infty[ \to X$ *localmente integrable está dada por:*

$$I_t^\alpha u(t) := (g_\alpha * u)(t) := \int_0^t g_\alpha(t-s)u(s)ds.$$

Se denota $I_t^0 u(t) := u(t)$. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville satisface la propiedad de semigrupo, esto debido a la Proposición 1.1.2. Se tiene:

$$I_t^\alpha I_t^\beta = I_t^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

La *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden* $0 < \alpha < 1$ de una función localmente integrable $u : [0, \infty[ \to X$ está definida por:

$$D_t^\alpha u(t) := \frac{d}{dt} \int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)u(s)ds = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * u)(t). \tag{1.11}$$

La *derivada fraccionaria de Caputo de orden* $0 < \alpha < 1$ se define por

$$cD_t^\alpha u(t) = (g_{1-\alpha} * u')(t) = \int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)u'(s)ds.$$

Se observa que, ambas definiciones presentan algunos obstáculos tanto matemáticos como físicos. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es de gran importancia en el cuerpo teórico del cálculo fraccionario y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Sin embargo, al tratar de realizar modelaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias surgió el problema de que las condiciones iniciales también son de orden fraccionario y ese tipo de condiciones no son interpretables físicamente, generando un problema al momento de hacer uso práctico del cálculo fraccionario.

Así, surge el concepto de derivada fraccionaria de Caputo que emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, lo que significa que son físicamente interpretables. Aunque, esta definición funciona muy bien en la práctica, desde el punto de vista matemático tiene una inconsistencia pues la definición obliga a conocer la existencia de la derivada usual de la función.

La siguiente proposición dice que tanto la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como de Caputo son siempre el inverso por izquierda de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, aunque en general no son inversos por derecha (ver [8]).

**Proposición 1.2.1.** *Sea* $0 < \alpha < 1$. *Entonces, para una función* $u : [0, \infty[ \to X$ *localmente integrable se tiene:*

(I) $D_t^\alpha I_t^\alpha u = u$.

(II) $cD_t^\alpha I_t^\alpha u = u$.

Algunos resultados simples pero importantes para las integrales y derivadas fraccionarias, en el caso $0 < \alpha, \beta < 1$ y $t > 0$, son:

$$I_t^\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta}, \quad D_t^\alpha g_\beta = g_{\beta-\alpha}, \quad \beta \geq \alpha. \tag{1.12}$$

En efecto,

$$D_t^\alpha g_\beta(t) = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * g_\beta)(t) = \frac{d}{dt} g_{1-\alpha+\beta}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\right) = \frac{t^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}.$$

La última parte corresponde a la definición de $g_{\beta-\alpha}(t)$ por lo tanto se tiene el resultado. Análogamente, se obtiene el resultado para la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. En particular, $D_t^\alpha g_\alpha = g_0 := 0$

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se define en general para $\alpha > 0$ como

$$D_t^\alpha u(t) := \frac{d^m}{dt^m}(g_{m-\alpha} * u)(t) = \frac{d^m}{dt^m} I_t^{m-\alpha} u(t), \ m = \lceil \alpha \rceil,$$

donde $\lceil \alpha \rceil := \text{mín}\{k \in \mathbb{Z} : \alpha \leq k\}$.

Se tiene una definición análoga para la derivada fraccionaria de Caputo, aunque para el desarrollo de nuestro trabajo solo se usa el caso en que $0 < \alpha < 1$. Ambas derivadas son buenas generalizaciones de la derivada ordinaria ya que cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$ coinciden con ella.

Por otro lado, recientemente ha habido varios esquemas dedicados a la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Estos esquemas se pueden clasificar en dos clases: numéricas y analíticas. Con ayuda de algunas funciones especiales se han obtenido representaciones explícitas de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales fraccionarias. Dos de ellas son las de Mittag-Leffler y de tipo Wright (ver [1, 8, 23]).

La función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ recibe este nombre en honor al matemático Gösta Mittag-Leffler quien introduce e investiga el comportamiento y las propiedades de esta función a lo largo de cinco artículos [13, Capítulo 2].

**Definición 1.2.2.** *La función de Mittag-Leffler se define por:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \ \alpha, \beta > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

**Observación 1.2.1.** *En el desarrollo de nuestro trabajo se usa la definición de la función de Mittag-Leffler en el caso $\beta = 1$, y se denota por $E_\alpha(z) := E_{\alpha,1}(z)$. También se observa que $E_\alpha(z)$ es una función entera para cualquier $\alpha > 0$, por que la serie converge para todos los valores del argumento $z$.*

La función de Mittag-Leffler también puede ser relacionada con funciones tradicionales como sigue:

(I) $E_0(z) = \frac{1}{1-z}$.

(II) $E_1(z) = e^z$.

(III) $E_2(z^2) = \cosh(z)$.

(IV) $E_2(-z^2) = \cos(z)$.

La derivada fraccionaria de Caputo de la función de Mittag-Leffler actua de manera similiar a la fórmula diferencial $\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ aunque de forma más general, como sigue,

$$cD_t^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

En el siguiente resultado se tiene la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler, $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$, en $\mu$ donde $Re(\mu) > |\lambda|^{1/\alpha}$.

**Proposición 1.2.2.** *Se tiene para todo $\mu \in \mathbb{C}$ con $Re(\mu) > |\lambda|^{1/\alpha}$ que*

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} E_\alpha(\lambda t^\alpha) dt = \mu^{\alpha-1}(\mu^\alpha - \lambda)^{-1}.$$

*Demostración.* Se tiene por la definición de la función $E_\alpha(\cdot)$ y la ecuación (1.6):

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\mu t} E_\alpha(\lambda t^\alpha) dt &= \int_0^\infty e^{-\mu t} \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^\infty e^{-\mu t} t^{\alpha k} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\mu^{\alpha k + 1}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{\mu^{\alpha k + 1}} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\lambda}{\mu^\alpha}\right)^k.\end{aligned}$$

Como $Re(\mu) > |\lambda|^{1/\alpha}$, es decir, $|\frac{\lambda}{\mu^\alpha}| < 1$, entonces la serie converge y así se obtiene finalmente que

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\lambda}{\mu^\alpha}\right)^k = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \lambda/\mu^\alpha} = \mu^{\alpha-1}(\mu^\alpha - \lambda)^{-1}.$$

□

En seguida, se da una de las definiciones de la notación de Landau: Si $f(z)$, $g(z)$ son funciones complejas definidas en un entorno de un punto $z_0$, entonces $f = O(g)$ cuando $z \to z_0$ si y solo si existe un $\epsilon > 0$ tal que $|f(z)| \leq \epsilon |g(z)|$ para todo $z$ en un entorno de $z_0$.

La siguiente es una de las propiedades más importantes que tiene la función de Mittag-Leffler ya que describe su expansión asintótica cuando $z \to \infty$ ([8, Proposición 1.2.3]).

**Proposición 1.2.3.** *Si $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$, entonces la función de Mittag-Leffler está dada por:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} + \epsilon_{\alpha,\beta}(z), \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\alpha\pi,$$

*donde*

$$\epsilon_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-N}), \quad z \to \infty.$$

**Observación 1.2.2.** *Se tiene por la proposición anterior y la continuidad de la función de Mittag-Leffler, $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ para $t \geq 0$, que: si $\lambda \geq 0$, entonces existe una constante $C$ tal que:*

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) \leq Ce^{\lambda^{1/\alpha}t}, \quad t \geq 0, \ \alpha \in ]0, 2[. \tag{1.13}$$

Otras funciones que se introducen son las funciones de tipo Wright. Inicialmente se tiene la función general de Wright, denotada por $W_{\lambda,\mu}(z)$, que es investigada e introducida por el eminente matemático británico E. Maitland Wright en una serie de notas a partir de 1933. La función general de Wright está definida por la siguiente serie, convergente en todo el plano complejo,

$$W_{\lambda,\mu}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, \ \mu \in \mathbb{C}.$$

Una de las propiedades importantes de la función general de Wright es su positividad para $t > 0$ ([1, Proposición 2.1 (ii)]):

$$W_{-\lambda,\mu}(-t) \geq 0, \quad \lambda \in ]0, 1[, \ \mu \geq 0. \tag{1.14}$$

Luego, Mainardi en su primer análisis de la ecuación de difusión fraccionaria temporal introduce dos funciones las cuales, por su definición, son llamadas funciones auxiliares de tipo Wright:

$$M_\alpha(z) := W_{-\alpha,1-\alpha}(-z), \quad F_\alpha(z) := W_{-\alpha,0}(-z), \quad 0 < \alpha < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$M_\alpha(z)$ se llama también función de Mainardi. Sin embargo, Bazhlekova en su trabajo doctoral ([8]) denota a la función de Mainardi, $M_\alpha(z)$, por $\Phi_\alpha(z)$ y en adelante se usa la misma notación para esta función.

**Definición 1.2.3.** *La función de tipo Wright $\Phi_\alpha(z)$ está definida por:*

$$\Phi_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\alpha n + 1 - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.15}$$

Otra representación de la función de tipo Wright $\Phi_\alpha(z)$ es su forma integral. Esta se obtiene haciendo $n = m - 1$ en la definición anterior y usando además la definición en serie de potencias de la función exponencial, la ecuación (1.1) y la propiedad $(IV)$ de la función gamma:

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(1-m\alpha)} = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^{m-1}}{(m-1)!}\Gamma(m\alpha)\sin(m\alpha\pi) \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{1}{2i\sin(\pi m\alpha)}\int_\Gamma t^{m\alpha-1}e^t dt\right)\sin(m\alpha\pi) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^t\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-z)^{m-1}}{(m-1)!}t^{m\alpha-1}\right)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}t^{n\alpha+\alpha-1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-zt^\alpha)^n}{n!}\right)t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^t e^{-zt^\alpha}t^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la representación integral de la función de tipo Wright $\Phi_\alpha(z)$ está dada por:

$$\Phi_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{\alpha-1}e^{\mu-z\mu^\alpha}d\mu \tag{1.16}$$

donde $0<\alpha<1$ y $\Gamma$ es un contorno que comienza y termina en $-\infty$ y rodea el origen en sentido antihorario.

**Proposición 1.2.4.** *Se tienen las siguientes propiedades para la función de tipo Wright, $\Phi_\alpha(t)$:*

(I) *Para $0<\alpha<1$ y $\delta>-1$,*

$$\int_0^\infty \tau^\delta\Phi_\alpha(\tau)d\tau = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\alpha\delta+1)}. \tag{1.17}$$

(II) *Para $0<\alpha<1$ y $s, Re(\lambda)>0$,*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})dt = \lambda^{\alpha-1}e^{-s\lambda^\alpha}. \tag{1.18}$$

*Demostración.* (I) En efecto, usando Fubini, (1.8) y (1.16) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \tau^\delta\Phi_\alpha(\tau)d\tau &= \int_0^\infty \tau^\delta\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{\alpha-1}e^{\mu-\tau\mu^\alpha}d\mu\right]d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^\mu\mu^{\alpha-1}\left[\int_0^\infty \tau^\delta e^{-\tau\mu^\alpha}d\tau\right]d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^\mu\mu^{\alpha-1}\frac{\Gamma(\delta+1)}{\mu^{\alpha(\delta+1)}}d\mu \\
&= \Gamma(\delta+1)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^\mu\mu^{-(\alpha\delta+1)}d\mu \\
&= \Gamma(\delta+1)\frac{1}{\Gamma(\alpha\delta+1)}.
\end{aligned}$$

(II) Sea $s, t > 0$, entonces

$$t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha}) = \frac{t^{-\alpha}}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{\alpha-1}e^{\mu - st^{-\alpha}\mu^\alpha}td\mu.$$

Se denota $\tau = \mu/t$, luego

$$\begin{aligned} t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha}) &= \frac{t^{-\alpha}}{2\pi i}\int_\Gamma (t\tau)^{\alpha-1}e^{t\tau-(st^{-\alpha})(t\tau)^\alpha}td\tau \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{2\pi i}\int_\Gamma t^\alpha\tau^{\alpha-1}e^{t\tau-s\tau^\alpha}d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tau^{\alpha-1}e^{t\tau-s\tau^\alpha}d\tau. \end{aligned}$$

Así, por la identidad anterior, usando Fubini y la fórmula de Cauchy se tiene finalmente para $Re(\lambda)$ suficientemente grande:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tau^{\alpha-1}e^{t\tau-s\tau^\alpha}d\tau\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \tau^{\alpha-1}e^{-s\tau^\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-t(\lambda-\tau)}dt\right)d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\tau^{\alpha-1}e^{-s\tau^\alpha}}{\lambda-\tau}d\tau \\ &= \lambda^{\alpha-1}e^{-s\lambda^\alpha}. \end{aligned}$$

Por extensión analitica se tiene que el resultado vale para $Re(\lambda) > 0$.

□

Otra función de tipo Wright que Mainardi introduce en [23], para $0 < \alpha < 1$, es la función $\mathbb{M}$-Wright en dos variables,

$$\mathbb{M}_\alpha(s,t) := t^{-\alpha}M_\alpha(st^{-\alpha}) = t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha}), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Por lo tanto, de la ecuación (1.18) se tiene que la transformada de Laplace en $\lambda$ de la función $\mathbb{M}_\alpha(s,t)$ con respecto a $t$ está dada por:

$$\widehat{\mathbb{M}_\alpha(s,\cdot)}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}e^{-s\lambda^\alpha}.$$

Un resultado que relaciona la función de tipo Wright $\Phi_\alpha(z)$ con la función de Mittag-Leffler es el siguiente.

**Proposición 1.2.5.** *Sea $z \in \mathbb{C}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces*

$$E_\alpha(z) = \int_0^\infty e^{zt}\Phi_\alpha(t)dt. \tag{1.20}$$

*Es decir, $E_\alpha(-z)$ es la transformada de Laplace de $\Phi_\alpha(t)$ en todo el plano complejo.*

*Demostración.* Por la definición en serie de potencias de la función exponencial y la ecuación (1.17) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{zt}\Phi_\alpha(t)dt &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(zt)^n}{n!}\right)\Phi_\alpha(t)dt\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\int_0^\infty t^n\Phi_\alpha(t)dt\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n+1)}\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se prueba la afirmación ya que la última identidad corresponde a la definición de la función de Mittag-Leffler. □

**Proposición 1.2.6.** *Sea $0<\alpha<1$, la función de tipo Wright, $\Phi_\alpha(t)$, es una función de densidad de probabilidad:*

$$\int_0^\infty \Phi_\alpha(t)dt = 1, \quad \Phi_\alpha(t)\geq 0, \quad t>0.$$

*Demostración.* Por la ecuación (1.20) y la definición de la función de Mittag-Leffler se tiene $\int_0^\infty \Phi_\alpha(t)dt = E_\alpha(0) = 1$. Ahora, $\Phi_\alpha(t) = W_{-\alpha,1-\alpha}(-t)$ y por (1.14) se tiene $\Phi_\alpha(t)\geq 0$ para $t>0$ y $\alpha\in ]0,1[$. □

Una generalización de la función $\mathbb{M}$-Wright en dos variables de Mainardi es definida en [1, Definición 3.1] como sigue.

**Definición 1.2.4.** *Para $0<\alpha<1$ y $\beta\geq 0$, se define la función $\psi_{\alpha,\beta}$ en dos variables por*

$$\psi_{\alpha,\beta}(s,t) := t^{\beta-1}W_{-\alpha,\beta}(-st^{-\alpha}), \quad t>0, \quad s\in\mathbb{C}.$$

Notar que, la función $\psi_{\alpha,\beta}$ considera algunos casos particulares que se usan en el desarrollo de este trabajo:

(i) para $\beta = 1-\alpha$, se tiene la función $\mathbb{M}$-Wright, (1.19),

$$\psi_{\alpha,1-\alpha}(s,t) = t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha}) = \mathbb{M}_\alpha(s,t), \quad s,t>0.$$

(ii) para $\beta=0$, se tiene la función

$$\psi_{\alpha,0}(s,t) := t^{-1}W_{-\alpha,0}(-st^{-\alpha}), \quad t>0, \quad s\in\mathbb{C}. \tag{1.21}$$

El siguiente resultado da algunas propiedades que verifica la función $\psi_{\alpha,\beta}(s,t)$, como su positividad y sus transformadas de Laplace con respecto a las variables $t$ y $s$ (ver [1, Teorema 3.2]).

**Teorema 1.2.1.** *Sea $0<\alpha<1$ y $\beta\geq 0$, se tiene*

(I) $\psi_{\alpha,\beta}(s,t)\geq 0$, *para* $s,t>0$.

(II) $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi_{\alpha,\beta}(s,t)dt=\lambda^{-\beta}e^{-s\lambda^{\alpha}}$, *para* $s,\lambda>0$.

(III) $\int_0^\infty e^{\lambda s}\psi_{\alpha,\beta}(s,t)ds=t^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha,\alpha+\beta}(\lambda t^{\alpha})$, *para* $t>0$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

(IV) $\int_0^\infty s^{\eta-1}\psi_{\alpha,\beta}(s,t)ds=t^{\alpha\eta+\beta-1}\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\alpha\eta+\beta)}$, *para* $t,\eta>0$.

## 1.3. Transformación de Poisson

La *distribución de Poisson* se aplica a varios fenómenos discretos de la naturaleza cuando la probabilidad de ocurrencia del fenómeno es constante en el tiempo o el espacio. Surge en conexión con los procesos de Poisson. Para cada $n\in\mathbb{N}_0$, la distribución de Poisson, está definida por

$$p_n(t):=e^{-t}\frac{t^n}{n!},\quad t\geq 0,$$

donde $n$ es el número de ocurrencias del evento o fenómeno y $t$ es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo de tiempo dado.

Es claro que $p_n(t)\geq 0$ y

$$\int_0^\infty p_n(t)dt=1,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

En seguida, se presenta un método que permite discretizar fenónemos continuos mediante el uso de las propiedades de la distribución de Poisson. En el Capítulo 4, se muestra que cuando este procedimiento se aplica a modelos fraccionarios definidos en la escala de tiempo real positivo ($\mathbb{R}^+$), estas transformaciones se comportan bien y se ajustan perfectamente a los conceptos fraccionarios discretos.

**Definición 1.3.1** (Transformación de Poisson, [19])**.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $f:[0,\infty[\to X$ una función localmente integrable y acotada. Se define la transformación de Poisson como*

$$\mathcal{P}(f)(n):=\int_0^\infty p_n(t)f(t)dt,\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{1.22}$$

En el caso de $\{S(t)\}_{t\geq 0}\subseteq\mathcal{B}(X)$ su transformada de Poisson se escribe como $\mathcal{P}(S)(n)x$ en lugar de $\mathcal{P}(S(\cdot)x)(n)$.

**Observación 1.3.1.** *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ y suponga que existe $M > 0$ tal que $||S(t)|| \leq M$, entonces*

$$||\mathcal{P}(S)(n)x|| \leq \int_0^\infty ||p_n(t)S(t)x||dt \leq M\int_0^\infty p_n(t)||x||dt = M||x||, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Por lo tanto, para todo $x \in X$, la transformada Z, $\widetilde{\mathcal{P}(S)}(z)x$, existe para todo $|z| > 1$.*

Una conexión interesante entre la transformada $Z$ y la transformada de Laplace puede darse por medio de la transformación de Poisson. Este es el contenido del siguiente resultado.

**Teorema 1.3.1.** *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ acotada. Entonces,*

$$\widetilde{\mathcal{P}(S)}(z)x = \widehat{S}(1 - 1/z)x, \quad x \in X,$$

*para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$.*

*Demostración.* Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$, entonces $1 - 1/z$ pertenece al disco $D(1,1) := \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega - 1| < 1\}$, pues $|(1 - 1/z) - 1| = 1/|z| < 1$. En particular, $Re(1 - 1/z) > 0$ ya que $(1-1/z) \in D(1,1)$. Así, existe $\widehat{S}(1-1/z)x$. Además por la Observación 1.3.1, se tiene que existe $\widetilde{\mathcal{P}(S)}(z)x$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{P}(S)}(z)x &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\mathcal{P}(S)(n)x = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\int_0^\infty p_n(t)S(t)xdt = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}S(t)xdt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t/z)^n}{n!}S(t)xdt = \int_0^\infty e^{-t}e^{t/z}S(t)xdt = \int_0^\infty e^{-(1-1/z)t}S(t)xdt \\
&= \widehat{S}(1 - 1/z)x,
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$, lo que prueba el teorema. □

**Observación 1.3.2.** *Un resultado análogo se cumple en el caso de que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sea reemplazado por una función continua y acotada $a : [0, \infty[\to \mathbb{C}$, obteniendo:*

$$\widetilde{\mathcal{P}(a)}(z) = \widehat{a}(1 - 1/z),$$

*para todo $z$ tal que $|z| > 1$.*

Por la definición del núcleo $k^\alpha$ en (1.4) y $g_\alpha$ en (1.5) se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.1.** *Para cada $\alpha > 0$ la siguiente propiedad de muestreo vale:*

$$\mathcal{P}(g_\alpha)(n) = k^\alpha(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene

$$\mathcal{P}(g_\alpha)(n) = \int_0^\infty p_n(t) g_\alpha(t) dt = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{n!} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha) n!} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\alpha-1} dt.$$

Como $\Gamma(n+1) = n!$ y $\Gamma(n+\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\alpha-1} dt$, entonces

$$\mathcal{P}(g_\alpha)(n) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)} = k^\alpha(n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

lo que prueba la afirmación. □

Como $\widehat{g_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}$, donde $\alpha > 0$, entonces por la Observación 1.3.2 se tiene que la transformada $Z$ de $k^\alpha$ está dada por:

$$\widetilde{k^\alpha}(z) = \widetilde{\mathcal{P}(g_\alpha)}(z) = \widehat{g_\alpha}(1 - 1/z) = \frac{z^\alpha}{(z-1)^\alpha}, \quad \text{para todo } \ |z| > 1.$$

# Capítulo 2

# Teoría de $C_0$-semigrupos

Este capítulo se enfoca en la teoría básica de los semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales acotados, llamados $C_0$-semigrupos, y su respectivo generador. Se enuncian algunas de las propiedades más importantes para introducir célebres teoremas como: Teorema de Hille-Yosida en su versión de contracciones, Teorema de la Perturbación acotada y el Teorema de Aproximación de Trotter-Kato. Finalmente, se presentan los teoremas de Datko-Pazy y Gearhart-Prüss-Greiner que caracterizan la estabilidad exponencial uniforme de los $C_0$-semigrupos sobre espacios de Banach y Hilbert respectivamente.

## 2.1. $C_0$-Semigrupos

Sea $X$ un espacio de Banach. Se dice que $T : [0, \infty[\to \mathcal{B}(X)$ es *fuertemente continuo* si para todo $x \in X$ el mapeo $t \mapsto T(t)x$ es continuo en $\mathbb{R}^+$.

**Definición 2.1.1** ($C_0$-semigrupo)**.** *Una familia de operadores lineales acotados, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, fuertemente continuo, se llama semigrupo o $C_0$-semigrupo, si cumple las siguientes condiciones:*

*(i) $T(0) = I$.*

*(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.*

*(iii) $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ para cada $x \in X$.*

Seguidamente, se establecen algunas propiedades básicas de los $C_0$-semigrupos, las demostraciones correspondientes pueden verse en [25].

En primer lugar, los $C_0$-semigrupos satisfacen una propiedad de acotación exponencial para su norma que se enuncia en el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.1** ([25, Capítulo 1, Teorema 2.2])**.** *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo, entonces existen $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.*

**Proposición 2.1.2.** *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un $C_0$-semigrupo, entonces para cada $x \in X$ la función $\phi_x : [0, \infty[\to X$ definida por $\phi_x(t) = T(t)x$ es continua.*

*Demostración.* Sea $t \geq 0$. Para $h > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} ||\phi_x(t+h) - \phi_x(t)|| &= ||T(t+h)x - T(t)x|| = ||T(t)T(h)x - T(t)x|| \\ &\leq ||T(t)||\; ||T(h)x - x|| \leq Me^{\omega t}||T(h)x - x||. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} ||\phi_x(t-h) - \phi_x(t)|| &= ||T(t-h)x - T(t)x|| = ||T(t-h)x - T(t-h+h)x|| \\ &\leq ||T(t-h)||\; ||x - T(h)x|| \leq Me^{\omega(t-h)}||x - T(h)x|| \end{aligned}$$

Luego, $||\phi_x(t+h) - \phi_x(t)||, ||\phi_x(t-h) - \phi_x(t)|| \to 0$ cuando $h \to 0^+$. □

**Definición 2.1.2** (Generador)**.** *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo en un espacio de Banach $X$ y sea $D(A)$ el subespacio de $X$ definido por*

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \;\; \textit{existe}\},$$

*y para cada $x \in D(A)$ se define*

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

*El operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ se llama generador de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*

De la definición de generador es claro que cada $C_0$-semigrupo tiene un único generador. En seguida, se muestra que cada generador proporciona un único $C_0$-semigrupo. Pero antes se dan otras propiedades del $C_0$-semigrupo y su correspondiente generador.

**Teorema 2.1.1** ([25, Capítulo 1, Teorema 2.4 y Corolario 2.5])**.** *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo en un espacio de Banach $X$ y sea $A$ su generador, entonces se cumple:*

(I) *Para cada $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \quad t \geq 0.$$

(II) *Para cada $x \in X$,*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \;\; y \;\; A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

(III) *Para cada $x \in D(A)$,*

$$T(t)x \in D(A) \;\; y \;\; \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(IV) *Para cada $x \in D(A)$,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau.$$

(V) *El operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ es un operador cerrado y $D(A)$ es denso en $X$.*

En seguida, se tiene como resultado que un $C_0$-semigrupo está únicamente determinado por su generador.

**Teorema 2.1.2.** *Sean $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ $C_0$-semigrupos en un espacio de Banach $X$ donde $A$ y $B$ son sus generadores respectivamente. Si $A = B$, entonces $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

*Demostración.* Sea $x \in D(A)$ y $t \geq 0$. Se define la función $\phi_t : [0, t] \to X$ por $\phi_t(s) = T(t - s)S(s)x$. Entonces por $(III)$ del Teorema 2.1.1 se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_t(s)}{ds} &= \frac{dT(t-s)S(s)x}{ds} \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x.\end{aligned}$$

Como $A = B$, entonces $\frac{d\phi_t(s)}{ds} = 0$, es decir, $\phi_t$ es constante en $[0, t]$. En particular $T(t)x = \phi_t(0) = \phi_t(t) = S(t)x$ para todo $t \geq 0$ y $x \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso en $X$, entonces $T = S$ en $X$. □

**Observación 2.1.1.** *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo, la propiedad de acotación dice que existen $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$. Si $\omega = 0$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se dice uniformemente acotado y si además $M = 1$, se llama un $C_0$-semigrupo de contracciones, es decir, $||T(t)|| \leq 1$, $t \geq 0$.*

El siguiente teorema es de gran importancia ya que caracteriza los generadores de los $C_0$-semigrupos de contracciones dando condiciones sobre el comportamiento del conjunto resolvente y del operador resolvente del generador.

**Teorema 2.1.3** (Hille-Yosida, [25, Capítulo 1, Teorema 3.1])**.** *Un operador lineal $A : D(A) \to X$, no necesariamente acotado, es el generador de un $C_0$-semigrupo de contracciones, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$, si y solo si*

(I) *$A$ es cerrado y $D(A)$ es denso en $X$.*

(II) *El conjunto resolvente, $\rho(A)$, contiene a $]0, \infty[$ y para todo $\lambda > 0$ se tiene*

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Una de las consecuencias del Teorema de Hille-Yosida es la caracterización de los generadores de $C_0$-semigrupos que son exponencialmente acotados.

**Teorema 2.1.4** (Generalización de Hille-Yosida, [25, Capítulo 1, Teorema 5.3])**.** *Un operador lineal $A$ es el generador de un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$, que satisface $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$, para algún $\omega \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$, si y solo si*

*(I) $A$ es cerrado y $D(A)$ es denso en $X$.*

*(II) El conjunto resolvente, $\rho(A)$, contiene la línea $]\omega, \infty[$ y*

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \quad \lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, se pregunta que sucede si se perturba al generador de un $C_0$-semigrupo añadiéndole un operador lineal acotado. Seguidamente, se presenta un teorema que da propiedades del $C_0$-semigrupo que persiste bajo tal perturbación.

**Teorema 2.1.5** (de la Perturbación acotada, [25, Capítulo 3, Teorema 1.1])**.** *Sea $A$ el generador de un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, en un espacio de Banach $X$, que satisface $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$ para algún $\omega \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$. Si $B$ es un operador lineal acotado en $X$, entonces $A+B$ es el generador de un $C_0$-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en $X$, que satisface $||S(t)|| \leq Me^{(\omega+M||B||)t}$.*

La relación de estos dos $C_0$-semigrupos está dada por

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)xds, \quad x \in D(A) = D(A+B).$$

La aproximación, además de la perturbación, es otro método utilizado para estudiar el operador manipulado y el $C_0$-semigrupo que genera. A continuación se muestra un resultado que muestra que la convergencia de una sucesión de generadores es equivalente a la convergencia de sus correspondientes $C_0$-semigrupos.

**Teorema 2.1.6** ([25, Capítulo 3, Teorema 4.2])**.** *Sean $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{T_n(t)\}_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, $C_0$-semigrupos generados por $A$ y $A_n$ respectivamente, que satisfacen para algún $\omega \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$: $||T(t)||, ||T_n(t)|| \leq Me^{\omega t}$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes*

*(I) Para cada $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda) > \omega$, $R(\lambda, A_n)x \to R(\lambda, A)x$ cuando $n \to \infty$.*

*(II) Para cada $x \in X$ y $t \geq 0$, $T_n(t)x \to T(t)x$ cuando $n \to \infty$.*

*Además, la convergencia en la parte (II) es uniforme en $t$-intervalos acotados.*

Una consecuencia directa del anterior teorema es el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.7** (de Aproximación de Trotter-Kato, [25, Capítulo 3, Teorema 4.4])**.** *Sea $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, el generador de un $C_0$-semigrupo, $\{T_n(t)\}_{t\geq 0}$, que satisface $||T_n(t)|| \leq Me^{\omega t}$ para algún $\omega \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$. Si para algún $\lambda_0$ con $Re(\lambda_0) > w$ se tiene:*

(I) *Cuando $n \to \infty$, $R(\lambda_0, A_n)x \to R(\lambda_0)x$ para todo $x \in X$ y*

(II) *el rango de $R(\lambda_0)$ es denso en $X$,*

*entonces existe un único operador $A$ que es el generador del $C_0$-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, que satisface $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$, tal que $R(\lambda_0) = R(\lambda_0, A)$. Además, cuando $n \to \infty$, $T_n(t)x \to T(t)x$ para todo $t \geq 0$ y $x \in X$.*

## 2.2. Nociones de estabilidad asintótica

Después de haber enunciado teoremas de generación, perturbación y aproximación para los semigrupos fuertemente continuos en la sección anterior, seguidamente se estudia uno de los tipos importantes de comportamiento asintótico: la estabilidad.

El desarrollo de la teoría de estabilidad incluye muchos conceptos no equivalentes como: exponencialmente estable, fuertemente estable, débilmente estable y polinomialmente estable. En este caso se estudia la estabilidad de los $C_0$-semigrupos vista desde el siguiente concepto de convergencia.

**Definición 2.2.1.** *Un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$, se dice uniformemente exponencialmente estable si existen constantes $\omega > 0$ y $M \geq 1$ tal que:*

$$||T(t)|| \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

La teoría más pionera de estabilidad para los $C_0$-semigrupos ha sido probada por Datko, en 1970, y en unos años más tarde, en 1972, Pazy completó el resultado de Datko y este resultado es conocido por Teorema de Datko-Pazy.

A lo largo del tiempo han surgido varios otros resultados y algunos usan la caracterización del espectro o resolvente del generador del $C_0$-semigrupo, pero estos enfoques son diferentes al enfoque del Teorema de Datko-Pazy. La idea que uso Datko en su prueba fue la función de Lyapunov en espacios de Hilbert mientras que Pazy baso su prueba en la integral de la norma del operador de evolución.

Antes de enunciar el Teorema de Datko-Pazy se introducen algunos conceptos y propiedades de los $C_0$-semigrupos, para las demostraciones ver [11].

**Definición 2.2.2.** *La constante de crecimiento de un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, está definida por:*

$$\omega_0 = \omega_0(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \lim_{t\to\infty} e^{-\omega t}||T(t)|| = 0\}.$$

De la definición de $\omega_0$ es claro el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.1.** *Un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente exponencialmente estable si y solo si $\omega_0 < 0$.*

Por otra parte, la identidad $\omega_0 = \text{lím}_{t\to\infty} \frac{\ln ||T(t)||}{t}$ permite establecer las siguientes caracterizaciones de estabilidad exponencial uniforme.

**Proposición 2.2.1** ([11, Capítulo V, Proposición 1.7])**.** *Para un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, las siguientes expresiones son equivalentes.*

(I) *$\omega_0 < 0$, es decir, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente exponencialmente estable.*

(II) *$\text{lím}_{t\to\infty} ||T(t)|| = 0$.*

(III) *$||T(t_0)|| < 1$ para algún $t_0 > 0$.*

Una observación esencial para la demostración del Teorema de Datko-Pazy se obtiene de estudiar el mápeo $\xi_x : t \mapsto T(t)x$. La estimación exponencial

$$||T(t)x|| \leq Me^{-\omega t}||x||$$

para constantes $\omega > 0$ y $M \geq 1$ y para todo $x \in X$, es decir, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ uniformemente exponencialmente estable, implica que cada $\xi_x(\cdot)$ pertenece a $L^p([0,\infty[, X)$ para todo $p \in [1,\infty[$. En efecto,

$$||\xi_x(t)||_p^p = \int_0^\infty ||\xi_x(t)||^p dt = \int_0^\infty ||T(t)x||^p dt \leq \int_0^\infty M^p e^{-\omega p t}||x||^p = M^p||x||^p.$$

Por lo tanto, para cada $x \in X$,

$$\int_0^\infty ||T(t)x||^p dt < \infty.$$

El siguiente teorema establece que también la implicación inversa se cumple.

**Teorema 2.2.1** (Datko-Pazy)**.** *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo en un espacio de Banach $X$. Entonces, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente exponencialmente estable si y solo si para un (o todo) $p \in [1,\infty[$ se tiene que*

$$\int_0^\infty ||T(t)x||^p dt < \infty, \qquad x \in X.$$

**Observación 2.2.1.** *Como consecuencia de la demostración del Teorema de Datko-Pazy (ver [11, Capítulo V, Teorema 1.8]) se tiene: si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo uniformemente exponencialmente estable, entonces existen constantes $M > 0$ y $p > 1$ tal que*

$$||T(t)|| \leq \frac{M}{t^{1/p}}, \quad t > 0.$$

Los criterios de estabilidad antes mencionados son muy buenos y útiles, sin embargo, tienen como desventaja que dependen del conocimiento explícito del $C_0$-semigrupo y en la mayoría de los casos solo se tiene el generador y su resolvente. Por lo tanto, caracterizaciones en términos de su generador son más interesantes.

El siguiente teorema puede considerarse como una generalización del teorema de Lyapunov de dimensión finita al caso de dimensión infinita. Se originó en el trabajo de Gearhart, en 1978, donde consideró el caso con un $C_0$-semigrupo de contracción en un espacio de Hilbert. Esto se extendió al caso sin contracción obteniendo nuevas y más simples pruebas trabajadas independientemente por Herbst, Howland, Huang y Prüss, el útimo en 1984. Para los espacios de Banach, Greiner dio una caracterización, en 1984.

**Teorema 2.2.2** (Gearhart-Prüss-Greiner). *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigrupo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente exponencialmente estable si y solo si el semiplano $\{\mu \in \mathbb{C} : Re(\mu) > 0\}$ está contenido en el conjunto resolvente del generador $A$, $\rho(A)$ y el resolvente de $A$ en $\mu$, $R(\mu, A)$, satisface*

$$M := \sup_{Re(\mu)>0} ||R(\mu, A)|| < \infty.$$

Para una demostración ver [11, Capítulo V, Teorema 1.11] y [10, Teorema 2.16], en los cuales una de las pruebas de este teorema está basada en las propiedades de la transformada de Laplace inversa y otra prueba usa el teorema de Datko-Pazy.

# Capítulo 3

# Teoría de familias resolventes

En este capítulo se introduce la teoría inicial de las familias $\alpha$-resolventes y $(\alpha,\alpha)$-resolventes (ver [8, 20]), las cuales permiten definir una solución para las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Además, se presentan algunas propiedades relacionadas con los generadores de estas familias. Al final, se enuncian resultados de subordinación para familias resolventes [8, 1].

## 3.1. Familias $\alpha$-resolventes

Inicialmente se dan dos definiciones de continuidad que caracterizan más adelante el generador de una familia $\alpha$-resolvente.

**Definición 3.1.1.** *Sea $\alpha > 0$. Una familia $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, donde $S_\alpha : [0,\infty[\to \mathcal{B}(X)$, de operadores lineales acotados se dice:*

(I) *Uniformemente continua si* $\lim_{t\to s} ||S_\alpha(t) - S_\alpha(s)|| = 0$ *para todo* $s \geq 0$.

(II) *Fuertemente continua si* $\lim_{t\to s} ||S_\alpha(t)x - S_\alpha(s)x|| = 0$ *para todo* $s \geq 0$ *y todo* $x \in X$.

A continuación se presenta una teoría que generaliza la definición de un $C_0$-semigrupo, dado que el siguiente concepto es consistente con la definición de un $C_0$-semigrupo.

**Definición 3.1.2.** *Sea $A$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ definido en un espacio de Banach $X$ y $\alpha > 0$. Se llama a $A$ el generador de una familia $\alpha$-resolvente si existe $\omega \geq 0$ y una función $S_\alpha : [0,\infty[\to \mathcal{B}(X)$ fuertemente continua tal que $\{\lambda^\alpha : Re(\lambda) > \omega\} \subseteq \rho(A)$, el conjunto resolvente de $A$, y*

$$\widehat{S_\alpha}(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x, \quad Re(\lambda) > \omega, \quad x \in X. \tag{3.1}$$

*En este caso, $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ es llamada la familia $\alpha$-resolvente generada por $A$.*

Por el teorema de la unicidad para la transformada de Laplace, una familia 1-resolvente, $S_1(t)$, es lo mismo que un $C_0$-semigrupo, mientras que una familia 2-resolvente, $S_2(t)$, corresponde a una familia coseno.

Hay una definición equivalente en términos de una ecuación funcional que generaliza la ecuación funcional de Cauchy: $T(s)T(t) = T(s+t)$. Para mayor información ver [22].

**Observación 3.1.1.** *En particular, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, se sigue de la Proposición 1.2.2 que*

$$S_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad t \geq 0,$$

*es la familia $\alpha$-resolvente generada por $A = \lambda I$*

Algunas propiedades de $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ están incluidas en la siguiente proposición, ([16, Lema 2.3]), que al igual que en los $C_0$-semigrupos relaciona las familias $\alpha$-resolventes con su generador.

**Proposición 3.1.1.** *Sea $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ la familia $\alpha$-resolvente generada por $A$, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(I) $S_\alpha(0) = I$.

(II) $S_\alpha(t)D(A) \subseteq D(A)$ *y* $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$, *para todo* $x \in D(A)$, $t \geq 0$.

(III) *Para todo* $x \in D(A)$:

$$S_\alpha(t)x = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)AS_\alpha(s)x ds, \quad t \geq 0.$$

El siguiente resultado da la forma que tiene el generador de una familia $\alpha$-resolvente.

**Proposición 3.1.2.** *Si $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ es la familia $\alpha$-resolvente generada por $A$, entonces*

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{t^\alpha} \text{ existe}\},$$

*y*

$$Ax = \Gamma(\alpha+1) \lim_{t\to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{t^\alpha}, \quad x \in D(A).$$

Se presentan algunos de los resultados más importantes de [8] que dan otras propiedades y caracterizaciones de las familias $\alpha$-resolventes:

**Teorema 3.1.1** ([8, Teorema 2.5])**.** *Sea $\alpha > 0$. Entonces, un operador lineal $A$ es el generador de una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, exponencialmente acotada y uniformemente continua si y solo si $A$ es un operador acotado.*

**Teorema 3.1.2** ([8, Teorema 2.6])**.** *Si $\alpha > 2$ y $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, exponencialmente acotada y fuertemente continua, entonces $A$ es acotada.*

Este último teorema dice que si se desea trabajar con familias $\alpha$-resolventes generadas por un operador $A$ no acotado estas solo tienen sentido para $0 < \alpha \leq 2$.

Posteriormente, se enuncian dos problemas los cuales permiten dar ejemplos de familias $\alpha$-resolventes.

**Ejemplo 3.1.1** ([8, Ejemplo 2.19]). *Sea $\alpha \in ]0,1[$, $\theta \in [0,\pi[$, $x \in ]0,1[$, $t > 0$, se considera el problema*

$$cD_t^{\alpha} u(x,t) = -e^{i\theta} u_x(x,t), \quad u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

*Sea $X = L^p]0,1[$, $A_\theta = -e^{i\theta}\frac{d}{dx}$ con $D(A_\theta) = \{f \in W^{1,p}(0,1) : f(0) = 0\}$. Entonces, se tiene la siguiente solución que depende de la función de tipo Wright, $\Phi_\alpha(z)$.*

$$S_\alpha(t)f(x) = e^{-i\theta} t^{-\alpha} \int_0^x \Phi_\alpha(se^{-i\theta} t^{-\alpha}) f(x-s) ds, \quad \forall f \in L^p.$$

**Ejemplo 3.1.2** ([8, Ejemplo 2.20]). *Sea $0 < \alpha < 2$, $\theta \in [0,\pi[$, $x \in ]0,1[$, $t > 0$, se considera el problema*

$$cD_t^{\alpha} u(x,t) = e^{i\theta} u_{xx}(x,t), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0.$$

*Sea $X = L^2]0,1[$, $B_\theta = e^{i\theta}\frac{d^2}{dx^2}$ con $D(B_\theta) = \{f \in W^{2,2}(0,1) : f(0) = f(1) = 0\}$. En particular, si $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$, entonces se tiene la solución representada por la serie:*

$$S_\alpha(t) f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) E_\alpha(z_n t^\alpha), \quad z_n = -e^{i\theta} n^2 \pi^2.$$

Aunque el teorema de perturbación funciona muy bien en el caso de los $C_0$-semigrupos, como se vio en el Teorema 2.1.5, con las familias $\alpha$-resolventes esta propiedad no es en general verdadera cuando $0 < \alpha < 1$, como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.3** ([8, Ejemplo 2.24]). *Sea $0 < \alpha < 1$ fijo. Se asume que $X = l^1$, el espacio de Banach de todas las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{C}$, con norma $||x||_{l^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Sea $A_\alpha$ un operador definido por:*

$$D(A_\alpha) = \{x \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n| < \infty\}, \quad A_\alpha x = \{e^{i\alpha\pi/2} n x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

*Entonces, se tiene que $A_\alpha$ genera una familia $\alpha$-resolvente, pero $A_\alpha + I$ no genera ninguna familia $\alpha$- resolvente.*

## 3.2. Familias $(\alpha, \alpha)$-resolventes

A continuación, se define el generador de la familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente.

**Definición 3.2.1.** *Sea $A$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ definido en un espacio de Banach $X$ y $\alpha > 0$. Se llama a $A$ el generador de una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente si existe $\omega \geq 0$ y una función $R_\alpha : [0, \infty[ \to \mathcal{B}(X)$ fuertemente continua tal que $\{\lambda^\alpha : Re(\lambda) > \omega\} \subseteq \rho(A)$, el conjunto resolvente de $A$, y*

$$\widehat{R_\alpha}(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} R_\alpha(t)x dt = (\lambda^\alpha - A)^{-1}x, \quad Re(\lambda) > \omega, \quad x \in X.$$

*En este caso, $\{R_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ es llamada la familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente generada por $A$.*

Note que la definición anterior generaliza el caso de las familias $\alpha$-resolventes, ya que una familia $(\alpha, 1)$-resolvente corresponde a una familia $\alpha$-resolvente. Además, estas familias son un caso particular de las familias $(\alpha, \beta)$-resolventes y más aún están incluidas en las familias $(a, k)$-regularizadas donde $a(t) = k(t) = g_\alpha(t)$, $0 < \alpha < 1$. Para mas información ver [20].

Al igual que con las familias $\alpha$-resolventes, para las familas $(\alpha, \alpha)$-resolventes se tiene una caracterización de su definición y una representación para su generador.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $\{R_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ la familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente generada por $A$, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(I) $\lim_{t \to 0} t^{1-\alpha} R_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} I$.

(II) *$R_\alpha(t)D(A) \subseteq D(A)$ y $AR_\alpha(t)x = R_\alpha(t)Ax$, para todo $x \in D(A)$, $t \geq 0$.*

(III) *Para todo $x \in D(A)$: $(g_\alpha * R_\alpha)(t)x \in D(A)$ y*

$$R_\alpha(t)x = g_\alpha(t)x + A(g_\alpha * R_\alpha)(t)x, \quad t \geq 0.$$

**Proposición 3.2.2.** *Si $\{R_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ es la familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente generada por $A$, entonces el operador $A$ está dado por*

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{R_\alpha(t)x - x}{g_\alpha(t)} \text{ existe}\},$$

*y*

$$Ax = \Gamma(\alpha + 1) \lim_{t \to 0^+} \frac{R_\alpha(t)x - x}{g_\alpha(t)}, \quad x \in D(A).$$

A continuación, se tiene una relación entre una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$, y una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente, $\{R_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$, ambas generadas por $A$.

**Teorema 3.2.1.** *Si $A$ es el generador de una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente, $\{R_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$, para algún $0 < \alpha < 1$, exponencialmente acotada, entonces $A$ es el generador de una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$, dada por*

$$S_\alpha(t) = (g_{1-\alpha} * R_\alpha)(t), \quad t \geq 0.$$

*Demostración.* Se tiene por hipótesis que $\widehat{R_\alpha}(\lambda) = (\lambda^\alpha - A)^{-1}$, luego

$$\begin{aligned}(\widehat{g_{1-\alpha} * R_\alpha})(\lambda) &= \widehat{g_{1-\alpha}}(\lambda)\widehat{R_\alpha}(\lambda)\\ &= \frac{1}{\lambda^{1-\alpha}}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\\ &= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\\ &= \widehat{S_\alpha}(\lambda).\end{aligned}$$

Así, por el Teorema 1.1.4 se concluye la demostración. □

## 3.3. Principios de subordinación

Un principio de subordinación, fue presentado anteriormente por Jan Prüss, en [26], para las ecuaciones integrales generales de Volterra. Sin embargo, se han obtenido nuevos resultados en [1, 8] que estudian en detalle este principio para la ecuación de evolución fraccionaria.

Por ejemplo, una fórmula de subordinación es dada por H. Fattorini, en 1985. En uno de sus trabajos muestra que si el operador $A$ genera una familia 2-resolvente, familia coseno $S_2(t)$, entonces $A$ genera un $C_0$-semigrupo, $S_1(t)$, y sus relación está dada por la *fórmula abstracta de Weierstrass*:

$$S_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-s^2/(4t)} S_2(s)ds, \quad t > 0.$$

Otras fórmulas de subordinación permiten crear nuevas familias de operadores de algunas versiones anteriores.

El siguiente teorema de Bazhlekova para familias $\alpha$-resolventes, es un caso particular del teorema presentado por Jan Prüss, y es de gran ayuda para estudiar la solución de algunas de las ecuaciones en diferencias fraccionarias del Capítulo 4.

**Teorema 3.3.1** ([8, Teorema 3.1])**.** *Sea $0 < \alpha < \beta \leq 2$, $\gamma = \alpha/\beta$ y $A$ un operador lineal cerrado definido en un espacio de Banach $X$. Si $A$ genera una familia $\beta$-resolvente $\{S_\beta(t)\}_{t\geq 0}$, tal que para $t \geq 0$ satisface $||S_\beta(t)|| \leq Me^{\omega t}$ para algún $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$, entonces $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, tal que para $t \geq 0$: $||S_\alpha(t)|| \leq Me^{\omega^{1/\gamma} t}$, y la siguiente representación es válida:*

$$S_\alpha(t)x := \int_0^\infty t^{-\gamma}\Phi_\gamma(st^{-\gamma})S_\beta(s)xds = \int_0^\infty \Phi_\gamma(\tau)S_\beta(\tau t^\gamma)xd\tau, \quad t \geq 0, \quad x \in X,$$

*donde $\Phi_\alpha(\tau)$ es la función de tipo Wright* (1.15)*.*

*Demostración.* Sea $x \in X$ fijo.

Se define

$$S(t)x := \int_0^\infty \Phi_\gamma(\tau)S_\beta(\tau t^\gamma)xd\tau, \quad t \geq 0.$$

(I) Se demuestra que $S(t)$ es exponencialmente acotada. En efecto, se sabe por hipótesis que $||S_\beta(t)|| \leq Me^{\omega t}$ para algún $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$, entonces

$$||S(t)|| \leq \int_0^\infty ||\Phi_\gamma(\tau)||.||S_\beta(\tau t^\gamma)||d\tau \leq \int_0^\infty ||\Phi_\gamma(\tau)||Me^{\omega(\tau t^\gamma)}d\tau.$$

Así, por las Proposiciones 1.2.5 y 1.2.6, se tiene

$$||S(t)|| \leq M\int_0^\infty \Phi_\gamma(\tau)e^{(\omega t^\gamma)\tau}d\tau = ME_\gamma(\omega t^\gamma).$$

Finalmente, por la ecuación (1.13) se obtiene

$$||S(t)|| \leq MCe^{\omega^{1/\gamma}t}, \quad t \geq 0.$$

(II) $S(t)$ es fuertemente continua ya que por el teorema de la convergencia dominada, por la propiedad de densidad de $\Phi_\gamma(\tau)$ y $S_\beta(0) = I$, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0+} S(t)x &= \lim_{t\to 0+} \int_0^\infty \Phi_\gamma(\tau)S_\beta(\tau t^\gamma)xd\tau \\
&= \int_0^\infty \Phi_\gamma(\tau)\left(\lim_{t\to 0+} S_\beta(\tau t^\gamma)x\right)d\tau \\
&= \int_0^\infty \Phi_\gamma(\tau)xd\tau \\
&= x\int_0^\infty \Phi_\gamma(\tau)d\tau \\
&= x.
\end{aligned}$$

(III) Se observa que $S(t) = S_\alpha(t)$. Para $\lambda > \omega^{1/\gamma}$ se sabe que $S(t)x = \int_0^\infty t^{-\gamma}\Phi_\gamma(st^{-\gamma})S_\beta(s)xds$, luego multiplicando a $S(t)x$ por $e^{-\lambda t}$ e integrando respecto a $t$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_0^\infty t^{-\gamma}\Phi_\gamma(st^{-\gamma})S_\beta(s)xds\right)dt \\
&= \int_0^\infty S_\beta(s)x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{-\gamma}\Phi_\gamma(st^{-\gamma})dt\right)ds.
\end{aligned}$$

Usando la ecuación (1.18), se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt = \int_0^\infty S_\beta(s)x\left(\lambda^{\gamma-1}e^{-s\lambda^\gamma}\right)ds = \lambda^{\gamma-1}\int_0^\infty e^{-s\lambda^\gamma}S_\beta(s)xds.$$

Así, por la hipótesis $\gamma = \alpha/\beta$, la definición de la familia $\beta$-resolvente, $\{S_\beta(t)\}_{t\geq 0}$, y la ecuación (3.1) se tiene finalmente que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt &= \lambda^{\gamma-1}\left[(\lambda^\gamma)^{\beta-1}((\lambda^\gamma)^\beta - A)^{-1}\right]x \\
&= \lambda^{\gamma-1}\left[\lambda^{\alpha-\gamma}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\right]x \\
&= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x \\
&= \widehat{S_\alpha}(\lambda)x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se demuestra, por definición, que $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, que además es exponencialmente acotada. $\square$

**Corolario 3.3.1.** *Sea $0<\alpha<1$ y $A$ un operador lineal cerrado definido en un espacio de Banach $X$. Si $A$ genera un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, tal que para $t\geq 0$ satisface $||T(t)||\leq Me^{\omega t}$ para algún $M\geq 1$ y $\omega\geq 0$, entonces $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ tal que para $t\geq 0$ satisface $||S_\alpha(t)||\leq Me^{\omega^{1/\alpha}t}$, y están relacionadas por la fórmula:*

$$S_\alpha(t)x=\int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})T(s)xds=\int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)T(\tau t^\alpha)xd\tau,\quad t\geq 0,\quad x\in X.$$

*Demostración.* Si $A$ genera un $C_0$-semigrupo, es decir, una familia 1-resolvente $S_1(t)=T(t)$, tal que para $t\geq 0$ satisface $||T(t)||\leq Me^{\omega t}$ para algún $M\geq 1$ y $\omega\geq 0$, entonces por el Teorema 3.3.1 se tiene cuando $\beta=1$ que $\gamma=\alpha$ y que $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ tal que

$$S_\alpha(t)x=\int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)S_1(t^\alpha\tau)xd\tau=\int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)T(\tau t^\alpha)xd\tau,\quad t\geq 0,\quad x\in X.$$

$\square$

L. Abadias y P. Miana en [1] dan una versión generalizada del principio de subordinación de Bazhlekova para familias $(\alpha,\alpha)$-resolventes ([1, Corolario 4.7]) como sigue.

**Teorema 3.3.2.** *Sea $0<\beta\leq 2$, $0<\gamma<1$, $\gamma=\alpha/\beta$ y $A$ un operador lineal cerrado definido en un espacio de Banach $X$. Si $A$ genera una familia $(\beta,\beta)$-resolvente $\{R_\beta(t)\}_{t\geq 0}$, tal que para $t\geq 0$: $||R_\beta(t)||\leq Me^{\omega t}$ para algún $M\geq 1$ y $\omega\geq 0$, entonces $A$ genera una familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, tal que para $t\geq 0$ se satisface $||R_\alpha(t)||\leq Me^{\omega^{1/\gamma}t}$, y está dada por:*

$$R_\alpha(t)x:=\int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)R_\beta(s)xds,\quad t\geq 0,\quad x\in X,$$

*donde $\psi_{\alpha,0}(s,t)$ es la función de tipo Wright* (1.21).

En particular, se tiene el caso en que $A$ genera un $C_0$-semigrupo.

**Corolario 3.3.2.** *Sea $0<\alpha<1$ y $A$ un operador lineal cerrado definido en un espacio de Banach $X$. Si $A$ genera un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, que satisface para $t\geq 0$: $||T(t)||\leq Me^{\omega t}$ para algún $M\geq 1$ y $\omega\geq 0$, entonces $A$ genera una familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente, $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, tal que para $t\geq 0$ satisface $||R_\alpha(t)||\leq Me^{\omega^{1/\alpha}t}$, y están relacionadas por:*

$$R_\alpha(t)x:=\int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)T(s)xds,\quad t\geq 0,\quad x\in X.$$

**Observación 3.3.1.** *Si en el Teorema 3.3.2 se tiene que* $\beta \in ]1,2]$ *y* $\{R_\beta(t)\}_{t\geq 0}$ *es la familia* $(\beta,\beta)$*-resolvente generada por* $A$ *que satisface para* $t \geq 0$*:* $||R_\beta(t)|| \leq Me^{\omega t}$*, para algún* $M \geq 1$ *y* $\omega \geq 0$*. Entonces,* $A$ *genera el siguiente* $C_0$*-semigrupo*

$$T(t)x := \int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)R_\beta(s)xds, \quad t \geq 0, \quad x \in X.$$

# Capítulo 4

# Ecuaciones en diferencias fraccionarias y estabilidad

En este capítulo se introduce la teoría del cálculo fraccionario discreto, en el cual se dan las definiciones del operador de diferencia fraccionaria de Riemann-Liouville y del operador de diferencia fraccionaria de Caputo. Además, se presenta un resultado que los relaciona. Luego, con ayuda de la transformación de Poisson, definida en el Capítulo 1, se relacionan los conceptos de derivada fraccionaria continua y derivada fraccionaria discreta. Finalmente, se definen problemas abstractos discretos de Cauchy, para luego estudiar su solución y estabilidad.

## 4.1. Cálculo fraccionario discreto

En esta sección se definen los operadores en diferencias fraccionarias y se muestran algunos de los resultados más importantes del cálculo fraccionario discreto que son necesarios para la solución de las ecuaciones en diferencias que son presentadas en la Sección 4.3. La siguiente teoría presentada está introducida en [19].

Para un número real $a$ se denota

$$\mathbb{N}_a := \{a, a+1, a+2, ...\},$$

y se escribe $\mathbb{N}_1 \equiv \mathbb{N}$. Sea $X$ un espacio de Banach complejo. Se denota por $s(\mathbb{N}_a; X)$ el espacio vectorial que consiste en todas las sucesiones de valores vectoriales $f : \mathbb{N}_a \to X$.

El *operador de Euler progresivo* $\Delta_a : s(\mathbb{N}_a; X) \to s(\mathbb{N}_a; X)$ está definido por

$$\Delta_a f(t) := f(t+1) - f(t), \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

Para $m \in \mathbb{N}_2$, se define recursivamente $\Delta_a^m : s(\mathbb{N}_a; X) \to s(\mathbb{N}_a; X)$ por

$$\Delta_a^m := \Delta_a^{m-1} \circ \Delta_a$$

y se llama el *operador de diferencia progresivo de orden $m$-ésimo* o simplemente *diferencia entera*.

Por ejemplo, para cualquier $f \in s(\mathbb{N}_0; X)$, se tiene

$$\Delta_0^m f(n) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} f(n+j), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

En particular, se obtiene:

$$\Delta_0^1 f(n) = f(n+1) - f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

También se denota $\Delta_a^0 \equiv I_a$, donde $I_a : s(\mathbb{N}_a; X) \to s(\mathbb{N}_a; X)$ es el *operador identidad* y $\Delta \equiv \Delta_0^1$.

La *convolución finita* $*$ de dos sucesiones $f, g \in s(\mathbb{N}_0; X)$ está definida como

$$(f * g)(n) := \sum_{j=0}^{n} f(n-j)g(j), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Así, una propiedad que relaciona el operador $\Delta$ con la convolución finita de $f$ y $g$ está dada por:

$$\Delta(f * g)(n) = (\Delta f * g)(n) + g(n+1)f(0), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\Delta(f * g)(n) &= (f * g)(n+1) - (f * g)(n) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} f(n+1-j)g(j) - \sum_{j=0}^{n} f(n-j)g(j) \\
&= f(n+1-(n+1))g(n+1) + \sum_{j=0}^{n} f(n+1-j)g(j) - \sum_{j=0}^{n} f(n-j)g(j) \\
&= f(0)g(n+1) + \sum_{j=0}^{n} [f(n+1-j) - f(n-j)]g(j) \\
&= f(0)g(n+1) + \sum_{j=0}^{n} \Delta f(n-j)g(j) \\
&= f(0)g(n+1) + ((\Delta f) * g)(n), \quad n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

La siguiente definición de *suma fraccionaria* fue propuesta por F. Atici y P. Eloe en el año 2009. Una de las razones para elegir este operador es debido a la flexibilidad que se maneja por medio de los métodos de la transformación $Z$. Además, por su buen comportamiento para hacer análisis matemático.

**Definición 4.1.1** (Suma fraccionaria)**.** *Sea $\alpha > 0$. Para cualquier número real positivo $a$, la $\alpha$-ésima suma fraccionaria de una sucesión $f$ es*

$$\nabla_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t} (t-s+1)^{\overline{\alpha-1}} f(s),$$

*donde $t \in \mathbb{N}_a$ y $t^{\overline{\alpha}} := \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)}$.*

En particular, en el caso $a = 0$ se escribe

$$\Delta^{-\alpha} f(n) \equiv \nabla_0^{-\alpha} f(n) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\Gamma(n-s+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-s+1)} f(s), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Así, por la definición de núcleo $k^\alpha$ de (1.4), el caso $a = 0$ se puede representar en términos de la convolución finita como

$$\Delta^{-\alpha} f(n) = \sum_{s=0}^{n} k^\alpha(n-s) f(s) = (k^\alpha * f)(n), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.2}$$

Para el tratamiento numérico de las ecuaciones en diferencias fraccionarias es esencial tener buenas aproximaciones del operador diferencial fraccionario, $D^\alpha$. Por lo tanto, para hacer una aproximación discreta del operador $D^\alpha$ es conveniente hacer uso de los operadores discretos de traslación: con paso hacia atrás y adelante. La discretización de Grünwald-Letnikov se basa en el esquema de Euler hacia atrás pero este esquema presenta algunos inconvenientes. Ch. Lubich propone un método diferente que combina el método clásico de Euler hacia atrás con una regla de cuadratura adecuada. Finalmente, el método de Lubich requiere de un núcleo para $\alpha > 0$ el cual corresponde a $k^\alpha$, definido en (1.4).

El siguiente concepto es análogo a la definición de la derivada fraccionaria discreta en el sentido de Riemann - Liouville que se da más adelante. En otras palabras, a una sucesión de valor vectorial dada, se aplica primero la suma fraccionaria y luego la diferencia entera:

**Definición 4.1.2** (Operador de diferencia fraccionaria nabla)**.** *El operador de diferencia fraccionaria nabla de orden $\alpha > 0$ se define por*

$$\nabla_a^{\alpha} f(t) = \Delta_a^m (\nabla_a^{-(m-\alpha)} f)(t), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

*donde $m - 1 < \alpha < m$, $m = \lceil \alpha \rceil$.*

Para el caso $a = 0$ se denota $\Delta^\alpha$ y corresponde a la definición del operador de diferencia fraccionaria $\Delta^\alpha : s(\mathbb{N}_0; X) \to s(\mathbb{N}_0; X)$ de orden $\alpha > 0$ en el sentido de Riemann - Liouville. Es decir, el *operador de diferencia fraccionaria en el sentido de Riemann - Liouville* de orden $\alpha > 0$ está definido por:

$$\Delta^\alpha f(n) := \Delta_0^m \circ \Delta^{-(m-\alpha)} f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.3}$$

donde $m-1<\alpha<m$, $m=\lceil\alpha\rceil$.

Intercambiando el orden de los operadores en la definición del operador de diferencia fraccionaria nabla, y de manera similar a lo anterior, se introduce la noción de operador de diferencia fraccionaria en el sentido de Caputo como sigue:

**Definición 4.1.3.** *Sea $\alpha>0$, la $\alpha$-ésima diferencia fraccionaria de Caputo se define por*

$$c\nabla_a^{\alpha}f(t)=\nabla_a^{-(m-\alpha)}(\Delta_a^m f)(t),\quad t\in\mathbb{N}_a,$$

*donde $m-1<\alpha<m$, $m=\lceil\alpha\rceil$.*

Para el caso particular $a=0$ se tiene que el *operador de diferencia fraccionaria en el sentido de Caputo* de orden $\alpha>0$ está definido por:

$$c\Delta^{\alpha}f(n):=\Delta^{-(m-\alpha)}(\Delta_0^m f)(n),\quad n\in\mathbb{N}_0,\tag{4.4}$$

donde $m-1<\alpha<m$, $m=\lceil\alpha\rceil$.

**Observación 4.1.1.** *Las definiciones* (4.3) *y* (4.4) *se pueden reescribir respectivamente, usando* (4.2)*, como:*

$$\Delta^{\alpha}f(n)=\Delta_0^m(k^{m-\alpha}*f)(n)\ \ y\ \ c\Delta^{\alpha}f(n)=(k^{m-\alpha}*\Delta_0^m f)(n),\quad con\ \ n\in\mathbb{N}_0.$$

A continuación, se introduce un operador que ayuda a establecer una relación entre los operadores de diferencia fraccionaria, Riemann-Liouville y Caputo, de orden $0<\alpha<1$.

Dado $p\in\mathbb{R}$, se define el *operador traslación* $\tau_p:s(\mathbb{N}_0;X)\to s(\mathbb{N}_0;X)$ por

$$(\tau_p f)(n):=f(n+p),\quad n\in\mathbb{N}_0.\tag{4.5}$$

En particular, cuando $p=1$ se tiene que $(\tau_1 f)(n)=f(n+1)$, entonces

$$\Delta f(n)=(\tau_1 f)(n)-f(n).$$

**Lema 4.1.1.** *Para cada $0<\alpha<1$ y $f\in s(\mathbb{N}_0;X)$ se tiene*

$$(k^{1-\alpha}*\tau_1 f)(n)=(k^{1-\alpha}*f)(n+1)-k^{1-\alpha}(n+1)f(0),$$

*donde $k^{1-\alpha}$ y $\tau_1$ son definidos en* (1.4) *y* (4.5) *respectivamente.*

*Demostración.* Se tiene por la definición de la convolución finita que

$$(k^{1-\alpha}*\tau_1 f)(n)=\sum_{s=0}^{n}k^{1-\alpha}(n-s)(\tau_1 f)(s)=\sum_{s=0}^{n}k^{1-\alpha}(n-s)f(s+1).$$

Luego, haciendo $s = l - 1$ se concluye el lema:

$$\begin{aligned}(k^{1-\alpha} * \tau_1 f)(n) &= \sum_{l=1}^{n+1} k^{1-\alpha}(n+1-l)f(l)\\ &= \sum_{l=0}^{n+1} k^{1-\alpha}(n+1-l)f(l) - k^{1-\alpha}(n+1)f(0)\\ &= (k^{1-\alpha} * f)(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)f(0).\end{aligned}$$

□

**Teorema 4.1.1.** *Para cada* $0 < \alpha < 1$ *y* $f \in s(\mathbb{N}_0; X)$ *se tiene*

$$c\Delta^\alpha f(n) = \Delta^\alpha f(n) - k^{1-\alpha}(n+1)f(0), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*donde* $k^{1-\alpha}$ *es definido en* (1.4).

*Demostración.* Se sabe que $c\Delta^\alpha f(n) = (k^{1-\alpha} * \Delta f)(n)$ donde $\Delta f = \tau_1 f - f$ por (4.5). Así, por el Lema 4.1.1 se tiene

$$\begin{aligned}c\Delta^\alpha f(n) &= (k^{1-\alpha} * (\tau_1 f - f))(n)\\ &= (k^{1-\alpha} * \tau_1 f)(n) - (k^{1-\alpha} * f)(n)\\ &= (k^{1-\alpha} * f)(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)f(0) - (k^{1-\alpha} * f)(n)\\ &= \Delta(k^{1-\alpha} * f)(n) - k^{1-\alpha}(n+1)f(0)\\ &= \Delta^\alpha f(n) - k^{1-\alpha}(n+1)f(0),\end{aligned}$$

lo que prueba el teorema. □

## 4.2. Muestreo vía la transformación de Poisson

Se inicia esta sección con la siguiente propiedad que conecta la convolución continua y la discreta, la cual es muy útil en el tratamiento de ecuaciones en diferencias abstractas de la siguiente sección.

**Teorema 4.2.1.** *Sea* $a : [0, \infty[ \to \mathbb{C}$ *una función tal que su transformada de Poisson y* $\widehat{a}(1)$ *existen. Sea* $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ *fuertemente continua tal que su transformada de Poisson y* $\widehat{S}(1)$ *existen. Entonces, para todo* $x \in X$,

$$\mathcal{P}(a * S)(n)x = (\mathcal{P}(a) * \mathcal{P}(S))(n)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Primero se observa que, por las propiedades de la transformada de Laplace, para cualquier función $f$ (escalar o de valor vectorial) con transformada de Laplace tal que

$\widehat{f}((1)$ existe, se tiene, por Teorema 1.1.5, que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(f)(n) &:= \int_0^\infty p_n(t)f(t)dt = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}f(t)dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty e^{-t}(-t)^n f(t)dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\widehat{f}^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n}{n!}\left.[\widehat{f}(\lambda)]^{(n)}\right|_{\lambda=1}.\end{aligned}$$

Entonces, usando la regla de Leibniz para la $n$-ésima derivada de un producto (1.9) se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a*S)(n)x &= \frac{(-1)^n}{n!}\left.[\widehat{a*S}(\lambda)x]^{(n)}\right|_{\lambda=1} = \frac{(-1)^n}{n!}\left.[\widehat{a}(\lambda)\widehat{S}(\lambda)x]^{(n)}\right|_{\lambda=1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left.[\widehat{a}(\lambda)]^{(n-j)}[\widehat{S}(\lambda)x]^{(j)}\right|_{\lambda=1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!}{(-1)^{n-j}}\mathcal{P}(a)(n-j)\frac{j!}{(-1)^{-j}}\mathcal{P}(S)(j)x \\ &= \sum_{j=0}^{n}\mathcal{P}(a)(n-j)\mathcal{P}(S)(j)x = (\mathcal{P}(a)*\mathcal{P}(S))(n)x.\end{aligned}$$

□

**Observación 4.2.1.** *Con los anteriores resultados se puede concluir que para $\alpha, \beta > 0$:*

$$k^{\alpha+\beta}(n) = \mathcal{P}(g_{\alpha+\beta})(n) = \mathcal{P}(g_\alpha * g_\beta)(n) = (\mathcal{P}(g_\alpha)*\mathcal{P}(g_\beta))(n) = (k^\alpha * k^\beta)(n).$$

**Proposición 4.2.1.** *Para $\alpha, \beta > 0$ y $u \in s(\mathbb{N}_0; X)$ se cumplen las siguientes identidades*

*(I)* $\Delta^{-\alpha}(\Delta^{-\beta}u)(n) = \Delta^{-(\alpha+\beta)}u(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$

*(II)* $\Delta^{-(\alpha+\beta)}u(n) = \Delta^{-\beta}(\Delta^{-\alpha}u)(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$

*Demostración.* Usando la ecuación (4.2), se concluye $(I)$:

$$\Delta^{-\alpha}(\Delta^{-\beta}u) = \Delta^{-\alpha}(k^\beta * u) = k^\alpha * (k^\beta * u) = (k^\alpha * k^\beta) * u = k^{\alpha+\beta} * u = \Delta^{-(\alpha+\beta)}u.$$

Así, intercambiando el papel de $\alpha$ por $\beta$ se obtiene $(II)$. □

**Observación 4.2.2.** *Para $\alpha, \beta > 0$ se tiene las siguientes identidades:*

$$\Delta^{-\alpha}k^\beta = k^\alpha * k^\beta = k^{\alpha+\beta}.$$

El siguiente teorema establece una notable y muy interesante relación entre las definiciones de derivada fraccionaria continua y derivada fraccionaria discreta en el sentido de Riemann-Liouville, (1.11) y (4.3) respectivamente. Esta relación se logra mediante el muestreo con la distribución de Poisson y es uno de los resultados más importantes para la realización de este trabajo, pues permite discretizar modelos fraccionarios en tiempos reales positivos, por ejemplo el problema fraccionario abstracto de Cauchy.

**Teorema 4.2.2.** *Sea $0<\alpha<1$ y $u:[0,\infty[\to X$ localmente integrable y acotada. Entonces, se tiene que*

$$\mathcal{P}(D_t^\alpha u)(n+1)=\Delta^\alpha\mathcal{P}(u)(n),\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Sea $n\in\mathbb{N}_0$ y $0<\alpha<1$. Como $u$ es acotada, existe una constante $M>0$ tal que $||u(t)||\leq M$ para todo $t\geq 0$. Además,

$$||(g_{1-\alpha}*u)(t)||\leq M\int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)ds=M\int_0^t g_{1-\alpha}(\tau)d\tau=Mg_{2-\alpha}(t),$$

para todo $t\geq 0$. Por lo tanto, $||p_{n+1}(t)(g_{1-\alpha}*u)(t)||\leq\frac{e^{-t}t^{n+2-\alpha}M}{\Gamma(2-\alpha)(n+1)!}$ y como consecuencia de una integración por partes se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(D_t^\alpha u)(n+1)&=\int_0^\infty p_{n+1}(t)D_t^\alpha u(t)dt=\int_0^\infty p_{n+1}(t)\frac{d}{dt}(g_{1-\alpha}*u)(t)dt\\&=p_{n+1}(t)(g_{1-\alpha}*u)(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty p'_{n+1}(t)(g_{1-\alpha}*u)(t)dt\\&=0-\int_0^\infty p'_{n+1}(t)(g_{1-\alpha}*u)(t)dt.\end{aligned}$$

Se observa que

$$-p'_{n+1}(t)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!}\right)=\frac{e^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{e^{-t}(n+1)t^n}{(n+1)!}=p_{n+1}(t)-p_n(t),\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Entonces, por el Teorema 4.2.1, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(D_t^\alpha u)(n+1)&=\int_0^\infty p_{n+1}(t)(g_{1-\alpha}*u)(t)dt-\int_0^\infty p_n(t)(g_{1-\alpha}*u)(t)dt\\&=(\mathcal{P}(g_{1-\alpha})*\mathcal{P}(u))(n+1)-(\mathcal{P}(g_{1-\alpha})*\mathcal{P}(u))(n)\\&=(k^{1-\alpha}*\mathcal{P}(u))(n+1)-(k^{1-\alpha}*\mathcal{P}(u))(n)\\&=\Delta(k^{1-\alpha}*\mathcal{P}(u))(n)=\Delta^\alpha\mathcal{P}(u)(n),\quad\forall n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

□

Para uso posterior se da la siguiente aplicación del anterior teorema.

**Corolario 4.2.1.** *Para cada $0 < \alpha < 1$ y $0 < \alpha < \beta$, se cumple*

$$\Delta^\alpha k^\beta(n) = k^{\beta-\alpha}(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Sea $n \in \mathbb{N}_0$, por la Proposición 1.3.1 se tiene que $k^\beta(n) = \mathcal{P}(g_\beta)(n)$. Luego, por el Teorema 4.2.2 se tiene que

$$\Delta^\alpha k^\beta(n) = \Delta^\alpha \mathcal{P}(g_\beta)(n) = \mathcal{P}(D_t^\alpha g_\beta)(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Además, por (1.12) se tiene:

$$\mathcal{P}(D_t^\alpha g_\beta)(n+1) = \mathcal{P}(g_{\beta-\alpha})(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Por lo tanto,

$$\Delta^\alpha k^\beta(n) = \mathcal{P}(g_{\beta-\alpha})(n+1) = k^{\beta-\alpha}(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

□

El siguiente resultado muestra que algunas propiedades de la familia $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ son heredadas a la familia de sucesiones $\{\mathcal{P}(S)(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

**Proposición 4.2.2.** *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ una familia de operadores lineales, fuertemente continua y exponencialmente acotada.*

(I) *Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es acotada, entonces $\{\mathcal{P}(S)(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es acotada.*

(II) *Si existen constantes $M > 0$ y $\omega > 0$ tal que $||S(t)|| \leq Me^{-\omega t}$ para todo $t \geq 0$, entonces $||\mathcal{P}(S)(n)|| \leq \frac{M}{(1+\omega)^{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.*

(III) *Sea $X$ un Banach Lattice (ver [2, Apéndice C, p478]). Si $S(t)x \geq 0$ para todo $x \geq 0$ y $t \geq 0$, entonces $\mathcal{P}(S)(n)x \geq 0$ para todo $x \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$.*

*Demostración.* (I) Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es acotada, existe $M > 0$ tal que $||S(t)|| \leq M$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$||\mathcal{P}(S)(n)|| \leq \int_0^\infty ||p_n(t)S(t)||dt \leq M, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(II) Como existen $M, \omega$ tales que $||S(t)|| \leq Me^{-\omega t}$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$||\mathcal{P}(S)(n)|| \leq \int_0^\infty p_n(t)Me^{-\omega t}dt = \frac{M}{n!}\int_0^\infty e^{-(1+\omega)t}t^n dt.$$

Por (1.7) se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-(1+\omega)t}t^n dt = \frac{n!}{(1+\omega)^{n+1}}.$$

Finalmente,

$$||\mathcal{P}(S)(n)|| \leq \frac{M}{(1+\omega)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(III) Como X es un Banach Lattice, existe un cono $\mathcal{C} \subseteq X$ tal que para $x \in X$ se tiene que $x \geq 0$ si y solo si $x \in \mathcal{C}$. Así, $S(t)x \geq 0$ si y solo si $S(t)x \in \mathcal{C}$ para todo $x \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{P}(S)(n)x \in \mathcal{C}$ para todo $x \in \mathcal{C}$ pues $p_n(t) \geq 0$ y $S(t)x \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, es decir, $\mathcal{P}(S)(n)x \geq 0$ para todo $x \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$.

□

## 4.3. Ecuaciones en diferencias fraccionarias lineales

Esta sección inicia con el estudio del siguiente problema de valor inicial discreto de orden fraccionario cuando $A$ es un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ definido en un espacio de Banach $X$:

$$\begin{cases} \Delta^\alpha u(n) = Au(n+1), & n \in \mathbb{N}_0 \\ \quad u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{4.6}$$

Los primeros estudios sobre el modelo (4.6) cuando $A$ es una matriz compleja o de valor real han aparecido recientemente como por ejemplo en los trabajos de F. Atici y P. Eloe, en el año 2011. Sin embargo, el caso no acotado, es decir, cuando $A$ es simplemente un operador lineal cerrado, no había sido estudiado en la literatura y solo hasta el 2017 se presenta este caso en [19].

Para resolver (4.6) es necesario introducir la siguiente noción de solución.

**Definición 4.3.1** ([19])**.** *Se dice que una sucesión de valor vectorial $u \in s(\mathbb{N}_0; X)$ es una solución para (4.6) si $u(n) \in D(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $u(n)$ satisface (4.6).*

El siguiente teorema es uno de los resultados de [19] y es la base para los resultados principales de esta tesis.

**Teorema 4.3.1.** *Suponga que $A$ es el generador de una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente, $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, en un espacio de Banach $X$ tal que $\widehat{R_\alpha}(1)$ existe. Entonces, la ecuación en diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1[$*

$$\Delta^\alpha u(n) = Au(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.7}$$

*con condición inicial $u(0) = u_0 \in D(A)$ admite la solución*

$$u(n) = \mathcal{P}(R_\alpha)(n)(I-A)u_0 := \int_0^\infty p_n(t) R_\alpha(t)(I-A)u_0 dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Sea $x \in X$ fijo. Primero se demuestra que $\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x \in D(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. De hecho, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene por Teorema 1.1.5 que:

$$\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x = \frac{(-1)^n}{n!} [\widehat{R_\alpha}(\lambda)]^{(n)} x \Big|_{\lambda=1},$$

donde $\widehat{R_\alpha}(\lambda) = (\lambda^\alpha - A)^{-1}$. Se denota $b(\lambda) = \lambda^\alpha$ y $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$, por lo tanto $\widehat{R_\alpha}(\lambda) = R(b(\lambda))$.

Así, $[\widehat{R_\alpha}(\lambda)]^{(n)} = [R(b(\lambda))]^{(n)}$. Además, por la regla de la $n$-ésima derivada de la composición (1.10) se tiene,

$$[(R \circ b)(\lambda)]^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \frac{U_i(\lambda)}{i!}[R(\lambda^\alpha)]^{(i)},$$

donde

$$\begin{aligned} U_i(\lambda) = [b(\lambda)^i]^{(j)} - \frac{i}{1!}b(\lambda)[b(\lambda)^{i-1}]^{(j)} + \frac{i(i-1)}{2!}b(\lambda)^2[b(\lambda)^{i-2}]^{(j)} - \\ ... + (-1)^{i-1}ib(\lambda)^{i-1}[b(\lambda)]^{(j)}. \end{aligned}$$

Notar que para todo $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene $[R(\lambda)]^{(m)}x = (-1)^m m!(\lambda - A)^{-(m+1)}x$. Por lo tanto, $[R(\lambda^\alpha)]^{(i)}x|_{\lambda=1} = (-1)^i i!(I - A)^{-(i+1)}x \in D(A)$, y por consiguiente

$$[(R \circ b)(\lambda)]^{(j)}x|_{\lambda=1} \in D(A).$$

Así, $[\widehat{R_\alpha}(\lambda)]^{(n)}x|_{\lambda=1} \in D(A)$, luego $\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x \in D(A)$.

A partir de la identidad del enunciado $(III)$ de la Proposición 3.2.1 se obtiene, para todo $x \in D(A)$,

$$p_n(t)R_\alpha(t)x = p_n(t)g_\alpha(t)x + Ap_n(t)(g_\alpha * R_\alpha)(t)x, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Por lo tanto, integrando respecto a $t$ y por el Teorema 4.2.1, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R_\alpha)(n)x &= \mathcal{P}(g_\alpha)(n)x + A\mathcal{P}(g_\alpha * R_\alpha)(n)x \\ &= k^\alpha(n)x + A(\mathcal{P}(g_\alpha) * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)x \\ &= k^\alpha(n)x + A(k^\alpha * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)x, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Convolucionando la identidad anterior por la sucesión $k^{1-\alpha}$ se obtiene

$$(k^{1-\alpha} * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)x = (k^{1-\alpha} * k^\alpha)(n)x + A(k^{1-\alpha} * k^\alpha * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Luego, aplicando las propiedades del núcleo y usando (4.2), se obtiene de la identidad

$$\begin{aligned} \Delta^{-(1-\alpha)}\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x &= k^1(n)x + A(k^1 * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)x \\ &= x + A\sum_{j=0}^{n} \mathcal{P}(R_\alpha)(j)x, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Ahora aplicando $\Delta$ se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \circ \Delta^{-(1-\alpha)}\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x &= \Delta x + A\left[\sum_{j=0}^{n+1} \mathcal{P}(R_\alpha)(j)x - \sum_{j=0}^{n} \mathcal{P}(R_\alpha)(j)x\right] \\ &= A\mathcal{P}(R_\alpha)(n+1)x, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Notar que la parte izquierda de la identidad corresponde a la diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1[$ en el sentido de Riemann-Liouville (para $m = 1$). Luego se tiene

$$\Delta^{\alpha}\mathcal{P}(R_{\alpha})(n)x = A\mathcal{P}(R_{\alpha})(n+1)x, \quad x \in X. \tag{4.8}$$

Defina $u(n) := \mathcal{P}(R_{\alpha})(n)(I-A)u_0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, luego $u(n) \in D(A)$ y $u(n)$ resuelve (4.7), pues

$$\Delta^{\alpha}u(n) := \Delta^{\alpha}\mathcal{P}(R_{\alpha})(n)(I-A)u_0 = A\mathcal{P}(R_{\alpha})(n+1)(I-A)u_0 = Au(n+1).$$

Finalmente, de la identidad $\mathcal{P}(R_{\alpha})(n)x = k^{\alpha}(n)x + A(k^{\alpha} * \mathcal{P}(R_{\alpha}))(n)x$, $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(R_{\alpha})(0)x &= k^{\alpha}(0)x + A(k^{\alpha} * \mathcal{P}(R_{\alpha}))(0)x, \\
&= x + A\sum_{j=0}^{0} k^{\alpha}(j-0)\mathcal{P}(R_{\alpha})(j)x \\
&= x + A\mathcal{P}(R_{\alpha})(0)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}(R_{\alpha})(0)(I-A)x = x$ y así se garantiza la condición inicial,

$$u(0) = \mathcal{P}(R_{\alpha})(0)(I-A)u_0 = u_0.$$

□

Por lo tanto, gracias a la transformación de Poisson se tiene una solución explícita de la ecuación (4.7) cuando $A$ es el generador de una familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente. Sin embargo, siempre resulta interesante conocer resultados que proporcionen soluciones cuando $A$ es el generador de un $C_0$-semigrupo, por las diferentes aplicaciones que permite la teoría de los $C_0$-semigrupos.

A continuación se presenta uno de los resultados principales de esta tesis, en el cual se obtiene, por el principio de subordinación para los $C_0$-semigrupos y el Teorema 4.3.1, una solución para la ecuación (4.7) cuando $A$ es el generador de un $C_0$-semigrupo.

**Teorema 4.3.2.** *Sea $0 < \alpha < 1$. Suponga que $A$ genera un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, acotado en un espacio de Banach $X$, entonces la ecuación en diferencia fraccionaria*

$$\Delta^{\alpha}u(n) = Au(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*con condición inicial $u(0) = u_0 \in D(A)$ admite la solución*

$$u(n) = \int_0^{\infty} \omega_{\alpha}(n,s)T(s)(I-A)u_0 ds,$$

*donde $\omega_{\alpha}(n,s) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{n!}t^n\psi_{\alpha,0}(s,t)dt$.*

*Demostración.* Dado que $A$ genera al $C_0$-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ acotado, entonces existe $M>0$ tal que $||T(t)||\leq M$ para $t\geq 0$. Luego, por el Corolario 3.3.2 se tiene que $A$ genera una familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ que está dada por:

$$R_\alpha(t)x := \int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)T(s)xds, \quad t\geq 0, \quad x\in X.$$

Además, por los enunciados $(I)$ y $(III)$ del Teorema 1.2.1 se tiene para $x\in X$ y $t>0$:

$$\begin{aligned}
||R_\alpha(t)|| &\leq \int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)||T(s)||ds \\
&\leq M\int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)ds \\
&= Mt^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(0t^\alpha) \\
&= Mt^{\alpha-1},
\end{aligned}$$

y por la ecuación (1.6) se sigue para $\lambda\in\mathbb{C}$ que

$$\begin{aligned}
||\widehat{R_\alpha}(\lambda)|| &\leq \int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t}||R_\alpha(t)||dt \\
&\leq M\int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t}t^{\alpha-1}dt \\
&= M\frac{\Gamma(\alpha)}{Re(\lambda)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Luego, existe $\widehat{R_\alpha}(1)$ y por Fubini se tiene que la transformación de Poisson de $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x &= \int_0^\infty p_n(t)R_\alpha(t)xdt \\
&= \int_0^\infty p_n(t)\int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)T(s)xdsdt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{n!}t^n\psi_{\alpha,0}(s,t)dt\right)T(s)xds \\
&= \int_0^\infty \omega_\alpha(n,s)T(s)xds, \quad n\in\mathbb{N}_0,\ x\in X.
\end{aligned}$$

Así, por Teorema 4.3.1 se obtiene la solución

$$u(n) = \mathcal{P}(R_\alpha)(n)(I-A)u_0 = \int_0^\infty \omega_\alpha(n,s)T(s)(I-A)u_0ds, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

□

Otro problema interesante que se estudia es dar la correspondiente ecuación en diferencia fraccionaria en el sentido de Caputo que tiene como solución la misma del Teorema 4.3.1. Finalmente, se obtiene el siguiente resultado que resuelve un problema de valor inicial con el operador de diferencia fraccionaria de Caputo.

**Corolario 4.3.1.** *Suponga que $A$ es el generador de una familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente, $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, en un espacio de Banach $X$ tal que $\widehat{R_\alpha}(1)$ existe. Entonces, la ecuación en diferencia fraccionaria de orden $\alpha\in]0,1[$*

$$c\Delta^\alpha w(n) = Aw(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)w_0, \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{4.9}$$

*con condición inicial $w(0)=w_0\in D(A)$ admite la solución*

$$w(n) = \mathcal{P}(R_\alpha)(n)(I-A)w_0, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* De la demostración del Teorema 4.3.1 se tiene que para $x\in X$,

$$\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x\in D(A).$$

Además, de la definición de familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente se tiene lo siguiente,

$$\mathcal{P}(R_\alpha)(0)x = \int_0^\infty p_0(t)R_\alpha(t)xdt = \int_0^\infty e^{-t}R_\alpha(t)xdt = \widehat{R_\alpha}(1)x = (I-A)^{-1}x,\ x\in X.$$

Por lo tanto, usando el Teorema 4.1.1 y la ecuación (4.8),

$$\Delta^\alpha\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x = A\mathcal{P}(R_\alpha)(n+1)x, \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad x\in X,$$

se obtiene que la diferencia fraccionaria de orden $\alpha\in]0,1[$ en el sentido de Caputo para $\mathcal{P}(R_\alpha)$:

$$\begin{aligned} c\Delta^\alpha\mathcal{P}(R_\alpha)(n)x &= A\mathcal{P}(R_\alpha)(n+1)x - k^{1-\alpha}(n+1)\mathcal{P}(R_\alpha)(0)x \\ &= A\mathcal{P}(R_\alpha)(n+1)x - k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)^{-1}x, \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad x\in X. \end{aligned}$$

Defina $w(n)=\mathcal{P}(R_\alpha)(n)(I-A)w_0$, $w_0\in D(A)$, para todo $n\in\mathbb{N}_0$. Luego, $w(n)\in D(A)$ y además satisface la ecuación (4.9):

$$\begin{aligned} c\Delta^\alpha w(n) &= c\Delta^\alpha\mathcal{P}(R_\alpha)(n)(I-A)w_0 \\ &= A\mathcal{P}(R_\alpha)(n+1)(I-A)w_0 - k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)^{-1}(I-A)w_0 \\ &= Aw(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)w_0, \quad n\in\mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Como $w(0)=\mathcal{P}(R_\alpha)(0)(I-A)w_0 = (I-A)^{-1}(I-A)w_0 = w_0$ lo que verifica la condición inicial. Luego, se prueba el corolario. □

Ahora bien, se sabe que los operadores del cálculo fraccionario han sido ampliamente utilizados para resolver varios problemas de la física y la astrofísica. Entre ellos una ecuación famosa es la ecuación cinética de orden fraccionario que se ha utilizado con éxito para determinar ciertos fenómenos físicos que regulan la difusión en medios porosos. Por lo tanto, un gran cuerpo de investigación en la solución de estas ecuaciones ha sido publicada en la literatura. La ecuación cinética fraccionaria para el caos hamiltoniano es discutida por Zaslavsky en [28]. Las soluciones y aplicaciones de ciertas ecuaciones cinéticas son estudiadas por Saichev y Zaslavsky en [27]. A continuación se introduce la definición de la *ecuación de Zaslavsky* de [7]:

$$D_t^\alpha g(x,t) = Lg(x,t) + h(x)\frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)},$$

donde $0 < \beta < 1$, $h \in X$ y $L$ es un operador lineal cerrado.

Reescribiendo la ecuación de Zaslavsky suprimiendo la variable espacial y usando la definición de $g_\beta$ de (1.5) se tiene para $0 < \beta < 1$, $x_0 \in X$ y $A = L$:

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + g_{1-\beta}(t)x_0. \tag{4.10}$$

Así, la versión discreta de (4.10) se obtiene de aplicar la transformación de Poisson y Teorema 4.2.2, como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(D_t^\alpha u)(n+1) &= A\mathcal{P}(u)(n+1) + \mathcal{P}(g_{1-\beta}x_0)(n+1)\\ \Delta^\alpha \mathcal{P}(u)(n) &= A\mathcal{P}(u)(n+1) + k^{1-\beta}(n+1)x_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $v(n) = \mathcal{P}(u)(n)$ se llega finalmente a la *ecuación discreta de Zaslavsky*

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\beta}(n+1)x_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 \in X. \tag{4.11}$$

La constante $x_0$ da la posibilidad de establecer diferentes condiciones para la ecuación discreta de Zaslavsky y así obtener varias soluciones siempre que $x_0 \in X$.

Como consecuencia del Teorema 4.3.1 se obtiene otro resultado importante y principal de esta tesis pues da una representanción explícita de la solución de la ecuación discreta de Zaslavsky (4.11) cuando $x_0 = (I - A)v_0 \in X$ donde $v_0 \in D(A)$.

**Teorema 4.3.3.** *Sea $0 < \alpha < 1$. Suponga que $A$ es el generador de una familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$ tal que $\widehat{R_\alpha}(1)$ existe. Entonces, la ecuación*

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*con condición inicial $v(0) = v_0 \in D(A)$ admite la solución*

$$v(n) = (k^{1-\alpha} * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)(I-A)v_0.$$

*Demostración.* Sea $u(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, la solución del problema de valor inicial del Teorema 4.3.1. Se define $v(n)$ por

$$v(n) := (k^{1-\alpha} * u)(n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Luego, por las propiedades de la convolución y las ecuaciones (4.1) y (4.2) se tiene

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha v(n) &= \Delta^\alpha (k^{1-\alpha} * u)(n)\\ &= \Delta[k^{1-\alpha} * (k^{1-\alpha} * u)](n)\\ &= \Delta[(k^{1-\alpha} * u) * k^{1-\alpha}](n)\\ &= [\Delta(k^{1-\alpha} * u) * k^{1-\alpha}](n) + k^{1-\alpha}(n+1)(k^{1-\alpha} * u)(0)\\ &= [(\Delta^\alpha u) * k^{1-\alpha}](n) + k^{1-\alpha}(n+1)(k^{1-\alpha} * u)(0).\end{aligned}$$

Como $u(n)$ satisface (4.7), entonces usando el operador traslación dado en (4.5) se tiene que $\Delta^\alpha u(n) = Au(n+1) = A(\tau_1 u)(n)$. Además, $v_0 = v(0) = (k^{1-\alpha} * u)(0) = u(0)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha v(n) &= [A(\tau_1 u) * k^{1-\alpha}](n) + k^{1-\alpha}(n+1)v_0\\ &= A[(\tau_1 u) * k^{1-\alpha}](n) + k^{1-\alpha}(n+1)v_0\\ &= A[k^{1-\alpha} * (\tau_1 u)](n) + k^{1-\alpha}(n+1)v_0.\end{aligned}$$

Luego, por el Lema 4.1.1 y por la definición de $v(n)$ se tiene

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha v(n) &= A[(k^{1-\alpha} * u)(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)v_0] + k^{1-\alpha}(n+1)v_0\\ &= Av(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)Av_0 + k^{1-\alpha}(n+1)v_0\\ &= Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0.\end{aligned}$$

Así, se tiene que $v(n)$ es solución de la ecuación

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

con condición inicial $v(0) = v_0 \in D(A)$.

Además, del Teorema 4.3.1 se tiene una expresión explícita para $u(n)$, es decir, $u(n) = \mathcal{P}(R_\alpha)(n)(I-A)u_0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Luego, se tiene

$$\begin{aligned}v(n) &= (k^{1-\alpha} * u)(n)\\ &= (k^{1-\alpha} * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)(I-A)u_0\\ &= (k^{1-\alpha} * \mathcal{P}(R_\alpha))(n)(I-A)v_0,\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

Todo los resultados que anteriormente se presentaron están restringidos a un operador $A$ que genera una familia $(\alpha,\alpha)$-resolvente $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Sin embargo, los siguientes resultados que se presentan se obtienen, en el desarrollo de esta tesis, con el fin de resolver problemas de valor inicial discretos de Cauchy cuando $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$.

En particular, el siguiente teorema da la solución de la ecuación discreta de Zaslavsky (4.11) cuando $x_0 = (I-A)v_0 \in X$ donde $v_0 \in D(A)$. La demostración esta basada en la prueba del Teorema 4.3.1 y su desarrollo es similar.

**Teorema 4.3.4.** *Sea $0 < \alpha < 1$. Suponga que $A$ es el generador de una familia $\alpha$-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$ tal que $\widehat{S_\alpha}(1)$ existe. Entonces, la ecuación*

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.12}$$

*con condición inicial $v(0) = v_0 \in D(A)$ admite la solución*

$$v(n) = \mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)v_0.$$

*Demostración.* Sea $x \in X$ fijo.

Se demuestra que $\mathcal{P}(S_\alpha)(n)x \in D(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene por Teorema 1.1.5 que:

$$\mathcal{P}(S_\alpha)(n)x = \frac{(-1)^n}{n!}[\widehat{S_\alpha}(\lambda)]^{(n)}x\Bigg|_{\lambda=1},$$

donde $\widehat{S_\alpha}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$. Se denota $a(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}$, $b(\lambda) = \lambda^\alpha$ y $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$, luego $\widehat{S_\alpha}(\lambda) = a(\lambda)R(b(\lambda))$.

Por la regla de Leibniz para la $n$-ésima derivada de un producto (1.9) se obtiene:

$$[\widehat{S_\alpha}(\lambda)]^{(n)} = [a(\lambda)R(b(\lambda))]^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}[a(\lambda)]^{(n-j)}[R(b(\lambda))]^{(j)}.$$

Además, por la regla de la $n$-ésima derivada de la composición (1.10) se tiene,

$$[(R\circ b)(\lambda)]^{(j)} = \sum_{i=1}^{j}\frac{U_i(\lambda)}{i!}[R(\lambda^\alpha)]^{(i)},$$

donde

$$U_i(\lambda) = [b(\lambda)^i]^{(j)} - \frac{i}{1!}b(\lambda)[b(\lambda)^{i-1}]^{(j)} + \frac{i(i-1)}{2!}b(\lambda)^2[b(\lambda)^{i-2}]^{(j)} - \\ ... + (-1)^{i-1}ib(\lambda)^{i-1}[b(\lambda)]^{(j)}.$$

Observe que para todo $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene $[R(\lambda)]^{(m)}x = (-1)^m m!(\lambda - A)^{-(m+1)}x$. Así, $[R(\lambda^\alpha)]^{(i)}x|_{\lambda=1} = (-1)^i i!(I-A)^{-(i+1)}x \in D(A)$, y por consiguiente $[(R\circ b)(\lambda)]^{(j)}x|_{\lambda=1} \in D(A)$.

Por lo tanto, $[\widehat{S_\alpha}(\lambda)]^{(n)}x|_{\lambda=1} \in D(A)$, luego

$$\mathcal{P}(S_\alpha)(n)x \in D(A).$$

Multiplicando la identidad del enunciado $(III)$ de la Proposición 3.1.1 por $p_n(t)$ se obtiene, para todo $x \in D(A)$:

$$p_n(t)S_\alpha(t)x = p_n(t)x + Ap_n(t)(g_\alpha * S_\alpha)(t)x, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Luego, integrando respecto a $t$ y usando el Teorema 4.2.1, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S_\alpha)(n)x &= x + A\mathcal{P}(g_\alpha * S_\alpha)(n)x \\ &= k^1(n)x + A(k^\alpha * \mathcal{P}(S_\alpha))(n)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Convolucionando la identidad anterior por la sucesión $k^{1-\alpha}$ se obtiene

$$(k^{1-\alpha} * \mathcal{P}(S_\alpha))(n)x = (k^{1-\alpha} * k^1)(n)x + A(k^{1-\alpha} * k^\alpha * \mathcal{P}(S_\alpha))(n)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ahora, aplicando las propiedades del núcleo y usando (4.2), se obtiene la identidad

$$\begin{aligned}\Delta^{-(1-\alpha)}\mathcal{P}(S_\alpha)(n)x &= k^{2-\alpha}(n)x + A(k^1 * \mathcal{P}(S_\alpha))(n)x \\ &= k^{2-\alpha}(n)x + A\sum_{j=0}^{n}\mathcal{P}(S_\alpha)(j)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Luego, aplicando $\Delta$ y por Corolario 4.2.1 se tiene

$$\begin{aligned}\Delta \circ \Delta^{-(1-\alpha)}\mathcal{P}(S_\alpha)(n)x &= \Delta k^{2-\alpha}(n)x + A\left[\sum_{j=0}^{n+1}\mathcal{P}(S_\alpha)(j)x - \sum_{j=0}^{n}\mathcal{P}(S_\alpha)(j)x\right] \\ &= k^{1-\alpha}(n+1)x + A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Se observa que la parte izquierda de la identidad anterior corresponde a la diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1[$ en el sentido de Riemann-Liouville (para $m = 1$). Por lo tanto, se tiene

$$\Delta^\alpha \mathcal{P}(S_\alpha)(n)x = A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)x + k^{1-\alpha}(n+1)x, \quad x \in X. \tag{4.13}$$

Defina $v(n) := \mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)v_0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, luego $v(n) \in D(A)$ y $v(n)$ resuelve (4.12), pues

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha v(n) &:= \Delta^\alpha \mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)v_0 \\ &= A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)(I-A)v_0 + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0 \\ &= Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0.\end{aligned}$$

Finalmente, notar que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S_\alpha)(0)x &= k^1(0)x + A(k^\alpha * \mathcal{P}(S_\alpha))(0)x, \\ &= x + Ak^\alpha(0)\mathcal{P}(S_\alpha)(0)x \\ &= x + A\mathcal{P}(S_\alpha)(0)x, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}(S_\alpha)(0)(I-A)x = x$ y se garantiza la condición inicial,

$$v(0) = \mathcal{P}(S_\alpha)(0)(I-A)v_0 = v_0.$$

$\square$

Note que, cuando $A$ genera un $C_0$-semigrupo también se obtiene por subordinación la existencia de una familia $\alpha$-resolvente. Por lo tanto, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.3.5.** *Sea $0 < \alpha < 1$. Suponga que $A$ genera un $C_0$-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, en un espacio de Banach $X$, entonces la ecuación en diferencia fraccionaria*

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*con condición inicial $v(0) = v_0 \in D(A)$ admite la solución*

$$v(n) = \int_0^\infty \phi_\alpha(n,s)T(s)(I-A)v_0 ds,$$

*donde $\phi_\alpha(n,s) := \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{n!} t^{n-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})dt$.*

*Demostración.* Por la hipótesis y el Corolario 3.3.1 se tiene $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ que está dada por:

$$S_\alpha(t)x = \int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})T(s)xds = \int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)T(\tau t^\alpha)xd\tau, \quad t \geq 0, \quad x \in X.$$

Como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que $||T(t)|| \leq M$ para $t \geq 0$. Luego, por la Proposición 1.2.6 se tiene para $x \in X$:

$$\begin{aligned} ||S_\alpha(t)|| &\leq \int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)||T(\tau t^\alpha)||d\tau \\ &\leq M\int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)d\tau \\ &= M. \end{aligned}$$

Luego, existe $\widehat{S_\alpha}(1)$ y usando Fubini se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S_\alpha)(n)x &= \int_0^\infty p_n(t)S_\alpha(t)xdt \\ &= \int_0^\infty p_n(t)\int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})T(s)xdsdt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty t^{-\alpha}p_n(t)\Phi_\alpha(st^{-\alpha})dt\right)T(s)xds \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{n!}t^{n-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})dt\right)T(s)xds \\ &= \int_0^\infty \phi_\alpha(n,s)T(s)xds, \quad n \in \mathbb{N}_0, \ x \in X. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por Teorema 4.3.4 se obtiene la solución

$$v(n) = \mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)v_0 = \int_0^\infty \phi_\alpha(n,s)T(s)(I-A)v_0ds, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

□

A continuación se enuncia un resultado que soluciona una ecuación en diferencia fraccionaria en el sentido de Caputo cuando $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. En particular, parte de la solución es la familia discreta de $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$.

**Corolario 4.3.2.** *Suponga que $A$ es el generador de una familia $\alpha$-resolvente, $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, en un espacio de Banach $X$ tal que $\widehat{S_\alpha}(1)$ existe. Entonces, la ecuación en diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1[$*

$$c\Delta^\alpha w(n) = Aw(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)Aw_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.14}$$

*con condición inicial $w(0) = w_0 \in D(A)$ admite la solución*

$$w(n) = \mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)w_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Por la demostración del Teorema 4.3.4 se tiene que para $x \in X$,

$$\mathcal{P}(S_\alpha)(n)x \in D(A).$$

Además, de la defínción de familia $\alpha$-resolvente se tiene

$$\mathcal{P}(S_\alpha)(0)x = \widehat{S_\alpha}(1)x = (I-A)^{-1}x, \quad x \in X.$$

Así, se tiene por el Teorema 4.1.1 y la relación (4.13),

$$\Delta^\alpha \mathcal{P}(S_\alpha)(n)x = A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)x + k^{1-\alpha}(n+1)x, \quad x \in X,$$

que la diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1[$ en el sentido de Caputo para $\mathcal{P}(S_\alpha)$ está dada por:

$$\begin{aligned} c\Delta^\alpha \mathcal{P}(S_\alpha)(n)x &= A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)x + k^{1-\alpha}(n+1)x - k^{1-\alpha}(n+1)\mathcal{P}(S_\alpha)(0)x \\ &= A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)x + k^{1-\alpha}(n+1)[I-(I-A)^{-1}]x \\ &= A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)x - k^{1-\alpha}(n+1)[A(I-A)^{-1}]x, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Se define $w(n) = \mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)w_0$, $w_0 \in D(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Luego, $w(n) \in D(A)$ y además satisface la ecuación (4.14):

$$\begin{aligned} c\Delta^\alpha w(n) &= c\Delta^\alpha \mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)w_0 \\ &= A\mathcal{P}(S_\alpha)(n+1)(I-A)w_0 - k^{1-\alpha}(n+1)[A(I-A)^{-1}](I-A)w_0 \\ &= Aw(n+1) - k^{1-\alpha}(n+1)Aw_0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Como $w(0) = \mathcal{P}(S_\alpha)(0)(I-A)w_0 = (I-A)^{-1}(I-A)w_0 = w_0$ se verifica la condición inicial. □

Observe que la acotación de un $C_0$-semigrupo implica automáticamente que $1 \in \rho(A)$, pues por definición se tiene que $I - A$ es invertible y con inversa acotada. Cuando $\alpha = 1$ se obtiene la siguiente consecuencia.

**Proposición 4.3.1.** *Sea $A$ el generador de un $C_0$-semigrupo acotado $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$. Entonces, la solución de $\Delta u(n) = Au(n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, con condición inicial $u(0) = u_0 \in D(A)$ está dada por $u(n) = (I-A)^{-n}u_0$, $n \in \mathbb{N}_0$*

*Demostración.* Se sabe de la Definición 3.2.1 que para el caso de $\alpha = 1$, $R_1(t) = T(t)$, y se tiene

$$\widehat{R_1}(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} R_1(t)xdt = (\lambda - A)^{-1}x, \quad Re(\lambda) > 0, \quad x \in X.$$

Luego,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt = (\lambda - A)^{-1}x, \quad Re(\lambda) > 0, \quad x \in X.$$

Derivando la anterior igualdad respecto a $\lambda$ se obtiene

$$\int_0^\infty (-t)e^{-\lambda t} T(t)xdt = (-1)(\lambda - A)^{-2}x, \quad Re(\lambda) > 0, \quad x \in X,$$

y nuevamente derivando respecto a $\lambda$,

$$\int_0^\infty (-t)^2 e^{-\lambda t} T(t)xdt = (-1)(-2)(\lambda - A)^{-3}x, \quad Re(\lambda) > 0, \quad x \in X.$$

Así sucesivamente se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} T(t)xdt = (\lambda - A)^{-(n+1)}x, \quad Re(\lambda) > 0, \quad x \in X.$$

Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{P}(T)(n)x = (\lambda - A)^{-(n+1)}x$, donde $Re(\lambda) > 0$ y $x \in X$. Así, cuando $\lambda = 1$, $\mathcal{P}(T)(n)x = (I - A)^{-(n+1)}x$, $x \in X$. Finalmente, por el Teorema 4.3.1 se tiene que $u(n) = \mathcal{P}(T)(n)(I - A)u_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, es la solución, es decir, $u(n) = (I - A)^{-n}u_0$, $n \in \mathbb{N}_0$. □

## 4.4. Propiedades de estabilidad de las familias resolventes

Como una aplicación de los teoremas y corolarios de la sección anterior, se dan condiciones necesarias para obtener la estabilidad de las soluciones. Una sucesión de valor vectorial $u \in s(\mathbb{N}_0, X)$ se dice *estable* si $||u(n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

El siguiente criterio es el resultado principal de esta tesis con respecto a la estabilidad de las solución del problema (4.6) cuando $A$ genera una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente.

**Teorema 4.4.1.** *Sea $0 < \alpha < 1$, suponga que $A$ es el generador de una familia $(\alpha, \alpha)$-resolvente $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$ y que existen constantes $M > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tal que*

$$||R_\alpha(t)|| \leq \frac{M}{t^\gamma}, \quad t > 0.$$

*Entonces, la solución de la ecuación en diferencias fraccionarias de orden $\alpha \in ]0, 1[$*

$$\Delta^\alpha u(n) = Au(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*es estable para todas las condiciones iniciales $u(0) = u_0 \in D(A)$.*

*Demostración.* Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene, por el Teorema 4.3.1 y la hipótesis, que:

$$\begin{aligned} ||u(n)|| &= ||\mathcal{P}(R_\alpha)(n)(I-A)u_0|| \\ &\leq \int_0^\infty ||p_n(t)R_\alpha(t)(I-A)u_0||dt \\ &\leq \int_0^\infty \frac{e^{-t}t^n}{n!}\frac{M}{t^\gamma}||(I-A)u_0||dt \\ &= \frac{M||(I-A)u_0||}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^{n-\gamma}dt. \end{aligned}$$

Sea $C = ||(I-A)u_0||$, una constante, entonces por la definición de la función gamma se obtiene

$$||u(n)|| \leq MC\frac{\Gamma(n-\gamma+1)}{n\Gamma(n)} = MC\frac{\Gamma(n-\gamma+1)}{n\Gamma(n)}\frac{n^{-(1-\gamma)}}{n^{-(1-\gamma)}} = \frac{MC}{n^\gamma}\frac{n^{-(1-\gamma)}\Gamma(n+(1-\gamma))}{\Gamma(n)}.$$

Por (1.3) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-(1-\gamma)}\Gamma(n+(1-\gamma))}{\Gamma(n)} = 1.$$

Además, $0 < \gamma < 1$, luego $||u(n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Como consecuencia del Corolario 3.3.2 y la Observación 2.2.1, se obtiene un resultado de estabilidad para la solución del problema (4.6) cuando $A$ genera un $C_0$-semigrupo uniformemente exponencialmente estable.

**Teorema 4.4.2.** *Suponga que $A$ genera un $C_0$-semigrupo uniformemente exponencialmente estable. Entonces, la solución de la ecuación en diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1]$*

$$\Delta^\alpha u(n) = Au(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*es estable para cada $u_0 \in D(A)$.*

*Demostración.* Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ el $C_0$-semigrupo uniformemente exponencialmente estable generador por $A$.

En el caso $\alpha = 1$ el resultado sigue del enunciado $(II)$ de la Proposición 4.2.2, en efecto: si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, es decir, existen constantes $M > 0$ y $\omega > 0$ tal que $||T(t)|| \leq Me^{-\omega t}$ para todo $t \geq 0$, entonces $\mathcal{P}(T)(n)$ es polinomialmente estable, es decir, $||\mathcal{P}(T)(n)|| \leq \frac{M}{(1+\omega)^{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, $||u(n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Suponga ahora $0 < \alpha < 1$. Por el principio de subordinación, del Corolario 3.3.2, $A$ genera a $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ donde

$$R_\alpha(t) = \int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)T(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Además, por la Observación 2.2.1 se sigue que existen constantes $M > 0$ y $p > 1$ tal que

$$||T(t)|| \leq \frac{M}{t^{1/p}}, \quad t > 0.$$

Como $p > 1$, entonces $0 < 1/p < 1$ y por el enunciado $(IV)$ del Teorema 1.2.1 se tiene que

$$\begin{aligned}||R_\alpha(t)|| &\leq \int_0^\infty \psi_{\alpha,0}(s,t)||T(s)||ds \\ &\leq M\int_0^\infty s^{-1/p}\psi_{\alpha,0}(s,t)ds \\ &= Mt^{\alpha(1-1/p)-1}\frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(\alpha(1-1/p))}.\end{aligned}$$

Como $C = M\frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(\alpha(1-1/p))}$ es una constante positiva y $0 < 1-\alpha(1-1/p) < 1$, entonces $||R_\alpha(t)|| \leq C/t^{1-\alpha(1-1/p)}$ y por Teorema 4.4.1 se tiene que $u(n)$ es estable. $\square$

Como consecuencia del teorema de Gearhart-Prüss-Greiner se tiene el siguiente resultado de estabilidad.

**Corolario 4.4.1.** *Sea $A$ el generador de un $C_0$-semigrupo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\{\mu \in \mathbb{C} : Re(\mu) > 0\} \subseteq \rho(A)$ y satisface*

$$M := \sup_{Re(\mu)>0} ||(\mu - A)^{-1}|| < \infty.$$

*Entonces, la solución de la ecuación en diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1[$*

$$\Delta^\alpha u(n) = Au(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*es estable para cada $u_0 \in D(A)$.*

*Demostración.* Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ el $C_0$-semigrupo generado por $A$ luego por el Teorema 2.2.2, de Gearhart-Prüss-Greiner, se tiene que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente exponencialmente estable y por el Teorema 4.4.2 se concluye que $u(n)$ es estable. $\square$

A continuación se presentan algunos resultados de estabilidad para la solución de la ecuación discreta de Zaslavsky, donde $A$ genera una familia $\alpha$-resolvente. Estos resultados se estudian también en [19].

**Teorema 4.4.3.** *Sea $0 < \alpha < 1$, suponga que $A$ es el generador de la familia $\alpha$-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach $X$ y que existen constantes $M > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tal que*

$$||S_\alpha(t)|| \leq \frac{M}{t^\gamma}, \quad t > 0.$$

*Entonces, la solución de la ecuación en diferencias fraccionarias de orden $\alpha \in ]0,1[$*

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*es estable para todas las condiciones iniciales $v(0) = v_0 \in D(A)$.*

*Demostración.* Se tiene para todo $n \in \mathbb{N}_0$, por el Teorema 4.3.4 y la hipótesis, que:

$$\begin{aligned}||v(n)|| &= ||\mathcal{P}(S_\alpha)(n)(I-A)v_0|| \\ &\leq \int_0^\infty ||p_n(t)S_\alpha(t)(I-A)v_0||dt \\ &\leq \int_0^\infty \frac{e^{-t}t^n}{n!}\frac{M}{t^\gamma}||(I-A)v_0||dt \\ &= \frac{M||(I-A)v_0||}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^{n-\gamma}dt.\end{aligned}$$

Sea $C = ||(I-A)v_0||$, luego $C$ es una constante y por la definición de la función gamma se obtiene

$$||v(n)|| \leq MC\frac{\Gamma(n-\gamma+1)}{n\Gamma(n)} = MC\frac{\Gamma(n-\gamma+1)}{n\Gamma(n)}\frac{n^{-(1-\gamma)}}{n^{-(1-\gamma)}} = \frac{MC}{n^\gamma}\frac{n^{-(1-\gamma)}\Gamma(n+(1-\gamma))}{\Gamma(n)}.$$

Por (1.3) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-(1-\gamma)}\Gamma(n+(1-\gamma))}{\Gamma(n)} = 1.$$

Como, $0 < \gamma < 1$, luego $||v(n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Usando el principio de subordinación del Corolario 3.3.1 y la Observación 2.2.1, se obtiene lo siguiente:

**Teorema 4.4.4.** *Suponga que $A$ genera un $C_0$-semigrupo uniformemente exponencialmente estable. Entonces, la solución de la ecuación en diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1]$*

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*es estable para cada $v_0 \in D(A)$.*

*Demostración.* Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ el $C_0$-semigrupo uniformemente exponencialmente estable generador por $A$.

En el caso $\alpha = 1$ el resultado sigue del enunciado $(II)$ de la Proposición 4.2.2, ya que $\mathcal{P}(T)(n)$ es polinomialmente estable.

Suponga ahora $0 < \alpha < 1$. Por el Corolario 3.3.1 $A$ genera a $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ donde

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)T(\tau t^\alpha)d\tau, \quad t \geq 0.$$

Por la Observación 2.2.1 existen constantes $M > 0$ y $p > 1$ tal que

$$||T(t)|| \leq \frac{M}{t^{1/p}}, \quad t > 0.$$

Así, como $p > 1$, entonces $1/p < 1$ y por la ecuación (1.17) se tiene que

$$
\begin{aligned}
||S_\alpha(t)|| &\leq \int_0^\infty ||\Phi_\alpha(\tau)T(\tau t^\alpha)||d\tau \\
&\leq \int_0^\infty ||\Phi_\alpha(\tau)|| \frac{M}{(\tau t^\alpha)^{1/p}} d\tau \\
&= \frac{M}{t^{\alpha/p}} \int_0^\infty \Phi_\alpha(\tau)\tau^{-1/p} d\tau \\
&= \frac{M}{t^{\alpha/p}} \frac{\Gamma(1-1/p)}{\Gamma(1-\alpha/p)}.
\end{aligned}
$$

Dado que $C = M\Gamma(1-1/p)/\Gamma(1-\alpha/p)$ es una constante positiva y $0 < \alpha/p < 1$ se tiene que $||S_\alpha(t)|| \leq C/t^{\alpha/p}$ y por Teorema 4.4.3 se concluye finalmente que $v(n)$ es estable. □

Nuevamente, por el teorema de Gearhart-Prüss-Greiner y el anterior teorema se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.4.2.** *Sea $A$ el generador de un $C_0$-semigrupo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\{\mu \in \mathbb{C} : Re(\mu) > 0\} \subseteq \rho(A)$ y satisface*

$$M := \sup_{Re(\mu)>0} ||(\mu - A)^{-1}|| < \infty.$$

*Entonces, la solución de la ecuación en diferencia fraccionaria de orden $\alpha \in ]0,1[$*

$$\Delta^\alpha v(n) = Av(n+1) + k^{1-\alpha}(n+1)(I-A)v_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*es estable para cada $v_0 \in D(A)$.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.2.2, de Gearhart-Prüss-Greiner, se tiene que el $C_0$-semigrupo generado por $A$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, es uniformemente exponencialmente estable y por el Teorema 4.4.4 se concluye que $v(n)$ es estable. □

A continuación, se presentan dos resultados de estabilidad para la ecuación (4.6) cuando $\alpha = 1$. Notar que se tiene $k^0(n) = 0$.

**Corolario 4.4.3.** *Sea $A$ el generador de un $C_0$-semigrupo acotado en un espacio de Banach $X$. Suponga que $||(I-A)^{-1}|| < 1$. Entonces, la solución de la ecuación $\Delta u(n) = Au(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, es estable.*

*Demostración.* Se tiene de la Proposición 4.3.1 que la solución de $\Delta u(n) = Au(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, está dada por $u(n) = (I-A)^{-n}u_0$.

Luego, $||u(n)|| = ||(I-A)^{-n}u_0|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, pues $||(I-A)^{-1}||^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ ya que $||(I-A)^{-1}|| < 1$. Por lo tanto, $u(n)$ es estable. □

Se denota por $D(z_0, \gamma) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \gamma\}$. En el caso $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ se obtiene directamente del Corolario 4.4.3 la siguiente consecuencia:

**Corolario 4.4.4.** *Sea* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash D(1,1)$, *entonces la solución de* $\Delta u(n) = \lambda u(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, *es estable.*

*Demostración.* La solución de $\Delta u(n) = \lambda u(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, está dada por $u(n) = (1-\lambda)^{-n}u_0$. Luego $||u(n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$ ya que como $\lambda \in \mathbb{C}\backslash D(1,1)$, entonces $|(1-\lambda)^{-1}| < 1$. Por lo tanto, $u(n)$ es estable. $\square$

# Bibliografía


[1] L. Abadias and P. J. Miana. A subordination principle on wright functions and regularized resolvent families. *Journal of Function Spaces*, pages 1–9, 2015.

[2] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Monographs in Mathematics, vol. 96, Birkhäuser Verlag, Basel, 2nd edition, 2001.

[3] F. Atici and P. Eloe. A transform method in discrete fractional calculus. *Int. J. Difference Equ.*, 2(2):165–176, 2007.

[4] F. Atici and P. Eloe. Initial value problems in discrete fractional calculus. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(3):981–989, 2009.

[5] F. Atici and P. Eloe. Two-point boundary value problems for finite fractional difference equations. *J. Difference Equ. Appl.*, 17(4):445–456, 2011.

[6] F. Atici and S. Şengül. Modeling with fractional difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 369(1):1–9, 2010.

[7] B. Baeumer, S. Kurita, and M. Meerschaert. Inhomogeneous fractional diffusion equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 8(4):371–386, 2005.

[8] E. G. Bazhlekova. *Fractional evolution equations in Banach spaces.* PhD thesis, TUE: Department of Mathematics and Computer Science, 2001.

[9] J. Díaz and T. Osler. Differences of fractional order. *Math. Comp.*, 28:185–202, 1974.

[10] T. Eisner. Stability of operators and operator semigroups. *Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Basel*, 209:204, 2010.

[11] K. J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000.

[12] C. Goodrich. Existence of a positive solution to a system of discrete fractional boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, 217(9):4770–4753, 2011.

[13] R. Gorenflo, A. Kilbas, F. Mainardi, and S. Rogosin. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.* Springer Monographs in Mathematics, New York, 2014.

[14] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products.* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 7th edition, 2007.

[15] H. Gray and N. Zhang. On a new definition of the fractional difference. *Math. Comp.*, 50(182):513–529, 1988.

[16] V. Keyantuo, C. Lizama, and M. Warma. Spectral criteria for solvability of boundary value problems and positivity of solutions of time-fractional differential equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2013:11, 2013.

[17] E. Kreyszig. *Introductory Funtional Analysis With Applications.* Wiley Classics Library, New York, 1989.

[18] B. Kuttner. On differences of fractional order. *Proc. London Math. Soc.*, 7(3):453–466, 1957.

[19] C. Lizama. The poisson distribution, abstract fractional difference equations, and stability. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145(9):3809–3827, 2017.

[20] C. Lizama. Abstract linear fractional evolution equations. In *Handbook of Fractional Calculus with Applications.* Fractional Differential Equations, vol. 2, De Gruyter, Berlin, 2019.

[21] C. Lizama and C. Goodrich. A transference principle for nonlocal operators using a convolutional approach: Fractional monotonicity and convexity. *Preprint*, 2018.

[22] C. Lizama and F. Poblete. On a functional equation associated with $(a, k)$-regularized resolvent families. *Abstract and Applied Analysis*, 2012:23, 2012.

[23] F. Mainardi, A. Mura, and G. Pagnini. The M-wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey. *International Journal of Differential Equations*, 2010:29, 2010.

[24] K. Miller and B. Ross. Fractional difference calculus. *Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus and Their Applications*, pages 139–152, 1989.

[25] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[26] J. Prüss. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhäuser Verlag, Springer Basel, 1993.

[27] A. Saichev and G. Zaslavsky. Fractional kinetic equations: solutions and applications. *Chaos*, 7(4):753–784, 1997.

[28] G. Zaslavsky. Fractional kinetic equation for hamiltonian chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 76(1):110 – 122, 1994.